L. L.

Elementos

— DE —

ARITHMETICA,

de accordo com o programma de sufficiencia ás

ESCOLAS NORMAES E GYMNASIOS

1916
TYP. DA CASA IDEAL
Campinas

L. L.

Elementos

== DE ==

ARITHMETICA,

de accordo com o programma de sufficiencia ás

ESCOLAS NORMAES E GYMNASIOS

1916
TYP. DA CASA IDEAL
Campinas

ARITHMETICA

PRELIMINARES

1 — Tudo que pode ser augmentado ou diminuido, chama-se *grandeza* ou *quantidade*. Um grupo de livros, uma peça de fazenda, são grandezas.

2 — Um só dos objectos que se contam: eis o que é a *unidade*. Num grupo de livros, a unidade é um livro.

3 — Uma unidade ou a reunião de diversas unidades, chama-se *numero*. Um livro, cinco livros, são numeros.

4 — O *numero concreto* designa a especie de unidade: seis pennas; o *numero abstracto*, não: dezoito, quarenta. *Numero par* é o que termina em 2, 4, 6, 8, 0; *numero impar* — o que termina em 1, 3, 5, 7, 9.

5 — Ha tres especies de numero:

inteiro, formado de unidades inteiras: tres maçãs;

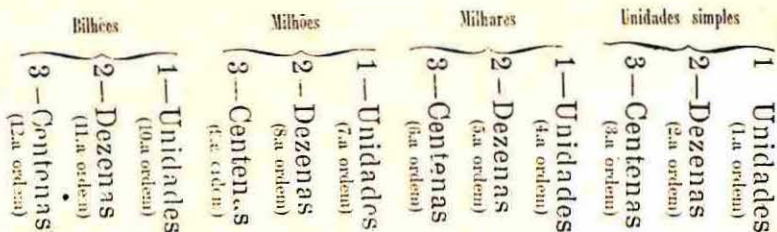
fraccionario ou *fracção*, formado de partes da unidade: tres quartos, cinco oitavos;

mixto, formado de inteiro e fracção: dois litros e meio.

O numero é *decimal* si a fracção que segue o inteiro é decimal, isto é, dividida de dez em dez: cinco metros e cincoenta centimetros. A parte decimal chama-se fracção decimal.

6 — A sciencia dos numeros é a *Arithmetica*.

7 — A parte da Arithmetica que ensina a *formar* e *escrever* os numeros, chama-se numeração. A *numeração falada* ensina a representar os numeros por meio de palavras; a *numeração escripta*, a representar-os por meio de signaes.

Bilhões			Milhões			Milhares			Unidades simples		
3 - Centenas (12.a ordem)	2 - Dezenas (11.a ordem)	1 - Unidades (10.a ordem)	3 - Centenas (9.a ordem)	2 - Dezenas (8.a ordem)	1 - Unidades (7.a ordem)	3 - Centenas (6.a ordem)	2 - Dezenas (5.a ordem)	1 - Unidades (4.a ordem)	3 - Centenas (3.a ordem)	2 - Dezenas (2.a ordem)	1 - Unidades (1.a ordem)

16 — *Principio.* Observa-se que a numeração falada obedece ao seguinte principio: *Dez unidades de uma ordem formam uma de ordem immediatamente superior.* Assim, dez unidades formam uma dezena; dez dezenas formam uma centena, e assim por diante.

Não fosse esse principio, e ter-se-ia de dar a cada numero uma palavra differente. Ter-se-ia então um numero enormissimo de palavras que a intelligencia mais vasta não conseguiria guardar de memoria.

Eis as palavras differentes usadas na numeração: *um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem, mil.* Os outros numeros são combinações dessas palavras e addição das terminações *enta* e *lhão.*

b) numeração escripta.

17 — Para escrever todos os numeros, a gente se serve de dez algarismos, que são:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

18 — Para escrever os numeros, fizeram-se estas convenções: 1.a) *Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que se estivesse no logar desse outro.*

2.a) *Substituem-se por zeros as ordens em que não ha unidades.*

Assim, um numero composto de 4 dezenas de milhares, 5 centenas e 8 unidades tem a seguinte representação: 40508.

19 — *Valor absoluto e valor relativo.* Do que precede resulta que todo algarismo pode ter dois valores: *absoluto* e *relativo*:

Valor *absoluto* de um algarismo é o que elle tem por si mesmo, quando isolado.

Valor *relativo* é o que elle tem por sua posição no numero.

No numero 4389, o valor absoluto do algarismo 3 é tres, emquanto que seu valor relativo é 300.

20 — *Regra para escrever um numero.* Escrevem-se as classes da esquerda para a direita, começando pela mais elevada, pondo zeros nas ordens em que não houver unidades.

Assim o numero quinhentos e nove mil e sete é escripto: 509007.

21 — *Regra para ler um numero.* Divide-se o numero em classes de tres algarismos, a partir da direita. Lêm-se as classes a partir da esquerda, dando a denominação de cada uma dellas.

4,600,859,604: quatro bilhões, seiscentos milhões, oitocentos e cincoenta e nove mil seiscentos e quatro.

Observações: 1.o) As unidades de nosso systema de numeração augmentam de 10 em 10; 10 é, pois, a base do systema, e este é *decimal.*

2.o) A numeração escripta decimal é mais perfeita do que a numeração falada, por isso que aquella se serve de 10 signaes apenas. Ella tem, além disso, a vantagem de facilitar o calculo.

Numeração dos numeros decimaes

22 — Si dividirmos um queijo em 10 partes eguaes, cada parte se chamará um *decimo.* Si dividirmos um decimo em 10 partes eguaes, cada parte se chamará um *centesimo.* Si dividirmos um centesimo em 10 partes eguaes, cada parte se chamará um millesimo. Continuando assim, obtemos unidades de 10 em 10 vezes menores, que se chamam fracções decimaes, e que se denominam: *decimos, centesimos, millesimos, decimos-millesimos, centesimos-millesimos, millionesimos, decimos-millionesimos,* etc.

Fracção decimal é portanto uma ou mais partes da unidade dividida em partes eguaes de 10 em 10.

Numero decimal é o numero formado de unidades inteiras e unidades decimaes, ou de unidades decimaes sómente.

23 — *Escrever um numero decimal.* Escreve-se a parte inteira separada da parte decimal por uma virgula, que se chama virgula decimal. A seguir, escreve-se a parte decimal de modo que a 1.a casa corresponda aos decimos, a 2.a aos centesimos, e assim por deante. Quando não houver algumas das ordens, põem-se zeros nas casas que lhes correspondem.

Escrever 3 inteiros, 5 centesimos, 8 millesimos e 4 millionesimos: 3, 058004.

24 — *Ler um numero decimal:*

1.o) Lê-se a parte inteira, depois a parte decimal, dando a denominação da ultima casa:

4,6084 (4 inteiros e 6084 decimos millesimos.)

2.º) Lê-se a parte inteira unida á parte decimal, dando a denominação da ultima casa:

3,08004 (308 mil e 4 centesimos millesimos.)

3.º) Quando a parte decimal contiver muitos algarismos, deve-se dividil-a em classes de tres algarismos, a partir da virgula, e enunciar cada classe dando-lhe o respectivo nome: dos *millesimos*, dos *millionesimos*, dos *billionesimos*, etc.:

3,800.465.086 (3 inteiros, 800 millesimos, 465 millionesimos, 86 billionesimos.)

Tornar os numeros inteiros e os decimaes 10,100,1000 vezes maior

25 — Para tornar um numero inteiro 10,100,1000 vezes maior, accrescenta-se-lhe 1, 2, 3 zeros.

26 dez vezes maior 260
26 cem » » 2600
26 mil » » 26000

Sendo o numero decimal, afasta-se-lhe a virgula 1, 2, 3 casas para a direita:

45,78 dez vezes maior 457,8
45,78 cem » » 4578,0
45,78 mil » » 45780,0

26 — Para tomar um numero inteiro 10, 100, 1000 vezes menor, separa-se com a virgula 1, 2, 3 casas, a partir da direita:

468 dez vezes menor 46,8
468 cem » » 4,68
468 mil » » 0,468

Sendo o numero decimal, afasta-se a virgula 1, 2, 3 casas para a esquerda:

36,45 dez vezes menor 3,645
36,45 cem » » 0,3645
36,45 mil » » 0,03645

37 — *Accrescentando* zeros a um numero decimal, não se lhe altera o valor; *prefixando*, o valor da parte decimal fica 10, 100, 1000... vezes menor, conforme se lhe prefixou 1, 2, 3 ... zeros.

45,6 = 45, 60 = 45, 600 = 45, 6000.

0, 4 é dez vezes maior do que . . . 0,04
0, 04 é » » » » . . . 0,004
0, 004 é dez vezes maior do que . . . 0,0004

28 — Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 são denominados arabicos.

Ha ainda outros algarismos usados para marcar as horas sobre os quadrantes dos relogios, os capitulos de um livro, etc. Estes algarismos são chamados romanos, por nos provirem dos romanos.

Taes são: I (um), V (cinco), X (dez), L (cincoenta), C (cem), D (quinhentos), M (mil).

29 — A numeração romana obedece ás seguintes regras:

1.º) Todo algarismo escripto á esquerda de outro maior, se subtrahe: IV (quatro);

2.º) Todo algarismo escripto á esquerda de outro maior, somma-se: XI (onze);

3.º) Todos algarismos eguaes escriptos a seguir, sommam-se: XXX (trinta); os algarismos que se repetem são I, X, C e M;

4.º) Todo algarismo callocado entre dois maiores, subtrahe-se do que lhe está á direita CXL (cento e quarenta);

5.º) Um risco horizontal sobre uma ou mais letras, eleva-lhes o valor de mil vezes; assim $\overline{D}$ (500.000); $\overline{XXX}$ (300.000.)

SYSTEMA DE NUMERAÇÃO

30 — *Base* de um systema de numeração é o numero de unidades necessarias para formar uma de ordem immediatamente superior.

Assim, o systema estudado é decimal, porque são necessarias 10 unidades de uma ordem para formar uma de ordem immediatamente superior.

Ha uma infinidade de systemas de numeração: *binario*, *ternario*, *quaternario*, *quinario*, *senario*, *septenario*, etc., conforme a base for 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.

31 — Qualquer systema tem o numero de algarismos marcado pela base. Assim, o systema quaternario tem os algarimos seguintes: 0, 1, 2, 3.

32 — A todo systema applicam-se analogamente os principios da numeração decimal. Assim, no systema quaternario, temos que:

1.º) Quatro unidades de uma ordem formam uma de ordem immediatamente superior;

2.º) Todo signal escripto á esquerda de outro representa unidades quatro vezes maiores do que se estivesse no logar desse outro;

3.º) Todos os numeros são combinações dos algarismos: 0, 1, 2, 3.

33 — Não havendo regra para se ler um numero escripto em systema não decimal, devem-se enunciar, separadamente, os algarismos das differentes ordens. Assim, o numero 4653, escripto no systema septenario, deve ser lido: 3 unidades de 1.ª ordem, 5 de segunda, 6 de 3.ª e 4 de 4.ª.

34 — Dado um numero escripto em qualquer systema, é sempre possivel escrevel-o no systema decimal, e vice-versa.

35 — *Regra para se passar ao systema decimal um numero pertencente a outro systema* — Multiplica-se o 1º. alga-

rismo á esquerda pela base do systema e somma-se ao algarismo seguinte; multiplica-se novamente pela base do systema e somma-se ao algarismo seguinte; assim se continúa, até se haver sommado o ultimo algarismo á direita.

Ex.: Passar o numero $\overline{4652}^{\,7}$ do systema septenario para o decimal: $4 \times 7 + 6 = 34$; $34 \times 7 + 5 = 243$; $243 \times 7 + 2 =$ 1703, no systema decimal.

36 — *Regra para se passar a outro systema um numero pertencente ao systema decimal.* Divide-se o numero dado pela base do systema para o qual a gente o passa; divide-se o quociente pela mesma base, e assim successivamente, até se obter para quociente um numero inferior ao divisor. O ultimo quociente e os demais restos, escriptos da esquerda para a direita e do ultimo para o primeiro, na ordem em que foram achados, darão o numero no systema pedido.

Ex.: Passar o numero 1703 para o systema septenario: 1703 : 7 = 243 (r. 2); 243 : 7 = 34 (r. 5); 34 : 7 = 4 (r. 6). O ultimo divisor (4) e os restos (6, 5, 2) dão o numero $\overline{4652}^{\,7}$ no systema septenario.

37 — *Regra para se passar um numero de um systema não decimal para outro não decimal.* — Passa-se o numero para o systema decimal, e depois para o systema requerido.

Ex. Passar o numero $\overline{3421}^{\,5}$ do systema quinario para o systema septenario: $\overline{3421}^{\,5} = \overline{486}^{\,10} = \overline{1263}^{\,7}$.

38 — As duas operações (multiplicação — passagem para o systema decimal, e divisão, passagem para systema requerido) podem ser combinadas, dividindo-se o numero dado e os quocientes successivos pela base do systema requerido. Os dividendos parciaes, porém, são constituidos por transformações parciaes ao systema decimal: assim, o 1.º dividendo parcial é formado pela multiplicação do 1.º algarismo á esquerda pela base do systema em que o numero está escripto, e pela somma desse producto ao algarismo seguinte; o 2.º dividendo parcial é formado pela multiplicação do resto pela base do systema em que está escripto o numero, e pela somma desse producto ao

algarismo seguinte, e assim por diante. O mesmo se faz nos quocientes que passarem a dividendos.

Ex.:

$\overline{3421}^{\,5}$	7		
$3 \times 5 + 4 = 19$	234	7	
$5 \times 5 + 2 = 27$	$2 \times 5 + 3 = 13$	14	7
$6 \times 5 + 1 = 31$	$6 \times 5 + 4 = 34$	$1 \times 5 + 4 = 9$	1
3	6	2	

39 — EXERCICIOS

1) Quantas unidades tem uma centena? uma dezena de milhares? uma centena de bilhões?

2) Quantas dezenas tem: uma centena? uma dezena de milhares? uma centena de bilhões?

3) Quantas centenas tem: dois milhões? tres dezenas de milhões? cinco centenas de bilhões?

4) Quantas dezenas de milhões têm cinco quatrilhões? duas centenas de sextilhões? tres unidades de nonilhões?

5) Indicar as classes e ordens dos numeros seguintes: quinze mil e seiscentos e quatro; trezentos e cinco milhões duzentos e quarenta e nove mil e sete unidades; dezoito quatrilhões, quinhentos e seis bilhões, quatro milhões, duzentas e sessenta mil quinhentos e noventa e seis unidades.

6) Enunciar abreviadamente os seguintes numeros: quatro milhares, duas centenas, tres dezenas e cinco unidades; oito dezenas de milhões, seis centenas de milhares, quatro dezenas de milhares, oito centenas, cinco dezenas e uma unidade; quatro quintilhões, seis unidades de quatrilhões, duas dezenas de bilhões, cinco dezenas de milhões, seis centenas de milhares, quatro dezenas de milhares, nove centenas e tres unidades,

7) Escrever os numeros seguintes: seis centenas, tres dezenas e oito unidades; nove dezenas de milhares, cinco centenas e duas unidades; quatro bilhões, tres centenas de milhares, duas dezenas de milhares, cinco milhares, nove centenas e oito dezenas; cinco quintilhões, seis quatrilhões, sete milhões, oito unidades.

8) Ler os numeros seguintes : 8; 12; 18; 35; 47; 86; 94; 158; 769; 1224; 356864; 74568975; 46876543; 4201046543210894301.

9) Passar da base 5 para a decimal, os numeros: 2401 ; 2341042 ; 201243421.

10) Passar da base 8 para a decimal, os numeros: 7452; 264320 ; 57640132.

11) Passar da base decimal para a base 2, os numeros: 45 ; 769 ; 5846 ; 789643.

12) Passar da base decimal para a base 6, os numeros: 78; 564; 7289 ; 456013.

13) Passar da base 3 para a base 9, os numeros: 201022 ; 102012110.

14) Passar da base 7 para a base 4, os numeros : 64210 ; 224304 ; 66454610.

15) Escrever um numero constando: de oito millesimos, tres centesimos e dois decimos ; de cinco millionesimos, seis millesimos e nove decimos; de tres billionesimos, quatro centesimos millionesimos, seis decimos-millionesimos, quatro decimos-millesimos, oito centesimos e dois decimos.

16) Ler os numeros seguintes : 0,4532;0,869 ; 687 65 ; 12, 0043, 003.

17) Tornar dez, cem, mil vezes maior, os numeros do exercicio precedente.

18) Tornar dez, cem, mil vezes menor, os numeros do exercicio ante-precedente.

19) Dizer si se altera, e, no caso affirmativo, quantas vezes, o numero decimal ao qual se prefixe um, dois, tres, cinco zeros.

20) Dizer si se altera, e porquê, o numero ao qual se accrescente um, dois, tres, cinco zeros.

21) Dizer si se altera, e porquê, o numero ao qual simultaneamente se prefixe e se accrescente : a) um zero ; b) cinco zeros.

22) Dizer si se altera, e porquê : a) o numero ao qual se prefixem dois zeros e se accrescentem tres; b) o numero ao qual se prefixem cinco zeros e se accrescentem dois.

22) Escrever os numeros seguintes, em algarismos romanos : 6, 15, 38, 49, 58, 76, 84, 176, 254, 896, 7854, 15722, 8997210.

24) Vinte mil millesimos quantos centesimos são ?

quantos decimos ? quantas unidades ? dezenas ? centenas ?

25) Determinar o numero de centesimos que são precizos para formar: uma unidade ; seis dezenas ; duas centenas e uma unidade de milhares.

26) Quantas unidades ha em cinco dezenas ? quantos decimos em cinco centenas ? quantos centesimos em cinco unidades de milhares ? quantos millesimos em cinco decimos ?

27) Tornar o numero 35, 408 : dez mil, cem mil vezes maior. Tornar o mesmo numero cem, mil, um milhão de vezes menor.

28) Passar para o systema decimal os numeros $\overline{3255}$, do systema septenario, $\overline{4211}$, do systema quinario, $\overline{200010}$, do systema ternario.

29) Passar respectivamente para os systemas binario, senario e duodecimal, os numeros seguintes, escriptos no systema decimal: 4689, 2451, 8073.

30) Passar do systema quinario para o duodecimal, o numero $\overline{30040}$.

31) Passar do systema senario para o binario o numero $\overline{45213}$.

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO DE INTEIROS E DECIMAES PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

Addição

40 — Exemplo : João tem 12 laranjas, Clovis tem 20 e Cicero tem 35. Quantas laranjas têm os meninos ? — Procurar este resultado é fazer uma addição.

Addição é a operação que tem por fim reunir dois ou mais numeros em um numero só.

O signal da addição é +, que se lê: *mais*.

Os numeros que se sommam chamam-se *parcellas*; o resultado da operação, *somma*.

ADDIÇÃO DOS NUMEROS INTEIROS.

41 — Ha tres casos a considerar :

1.º) sommar dois numeros de um só algarismo ;

2.º) sommar um numero de um só algarismo a um outro de diversos algarismos ;

3.º) sommar numeros de diversos algarismos.

42 — 1.º *caso*. Regra: Junctam-se, a um dos numeros, as unidades do outro, para o que é precizo saber de cór a seguinte

TABOA DE ADDIÇÃO

1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4
1 « 2 « 3	2 « 2 « 4	3 « 2 « 5
1 « 3 « 4	2 « 3 « 5	3 « 3 « 6
1 « 4 « 5	2 « 4 « 6	3 « 4 « 7
1 « 5 « 6	2 « 5 « 7	3 « 5 « 8
1 « 6 « 7	2 « 6 « 8	3 « 6 « 9
1 « 7 « 8	2 « 7 « 9	3 « 7 « 10
1 « 8 « 9	2 « 8 « 10	3 « 8 « 11
1 « 9 « 10	2 « 9 « 11	3 « 9 « 12
4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7
4 « 2 « 6	5 « 2 « 7	6 « 2 « 8
4 « 3 « 7	5 « 3 « 8	6 « 3 « 9
4 « 4 « 8	5 « 4 « 9	6 « 4 « 10
4 « 5 « 9	5 « 5 « 10	6 « 5 « 11
4 « 6 « 10	5 « 6 « 11	6 « 6 « 12
4 « 7 « 11	5 « 7 « 12	6 « 7 « 13
4 « 8 « 12	5 « 8 « 13	6 « 8 « 14
4 « 9 « 13	5 « 9 « 14	6 « 9 « 15
7 + 1 = 8	8 + 1 = 9	9 + 1 = 10
7 « 2 « 9	8 « 2 « 10	9 « 2 « 11
7 « 3 « 10	8 « 3 « 11	9 « 3 « 12
7 « 4 « 11	8 « 4 « 12	9 « 4 « 13
7 « 5 « 12	8 « 5 « 13	9 « 5 « 14
7 « 6 « 13	8 « 6 « 14	9 « 6 « 15
7 « 7 « 14	8 « 7 « 15	9 « 7 « 16
7 « 8 « 15	8 « 8 « 16	9 « 8 « 17
7 « 9 « 16	8 « 9 « 17	9 « 9 « 18

43—2.º caso Regra. Reunem-se as unidades do primeiro ás unidades do segundo.

Assim, para se effectuar a addição: 36+7, diz-se: 7 unidades+6 unidades=13 unidades ou 1 dezena e 3 unida-

des; 1 dezena+3 dezenas=4 dezenas. O resultado é, pois, 4 dezenas e 3 unidades, ou 43.

44—3.º caso. *Regra*. Decompõe-se o numero composto e faz-se a somma separadamente.

	1	2	
45=		4 dezenas	+ 5 unidades
268=	2 centenas	+ 6 «	+ 8 «
239=	2 «	+ 3 »	+ 9 «
	5 «	+ 5 «	+ 2 «

Na prática observa-se a seguinte *regra*: Escrevem-se as parcellas umas debaixo das outras, de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam em columna vertical, e sublinha-se a ultima parcella. Sommam-se os algarismos de cada columna, da direita para á esquerda. Si a primeira somma parcial for superior a 10, escreve-se por inteiro sob a columna sommada; si fôr inferior, escrevem-se apenas as unidades sob esta columna, levando as dezenas para a columna seguinte, e assim por diante. A somma da ultima columna escreve se por inteiro sob ella.

ADDIÇÃO DE NUMEROS DECIMAES

45—A addição dos numeros decimaes se faz como a dos numeros inteiros; basta collocar as virgulas das parcellas e a da somma ou total umas debaixo das outras.

$$\begin{array}{r} 2,359 \\ 14,544 \\ \hline 16,903 \end{array}$$

46—Provas: *a)* Dos noves: Tiram-se os noves das parcellas e, separadamente, da somma; os restos devem ser eguaes.

b) Reaes: 1) Somma-se em sentido inverso; as sommas devem ser eguaes.

2) Sommam-se as columnas, em ordem opposta, e escreve-se na parte correspondente a cada columna a sua somma, preenchendo com zeros as casas seguintes. As sommas devem ser eguaes.

3) Sommam-se as columnas em ordem opposta, e as

sommas subtraem-se daquellas correspondentes a essas columnas, e que são representadas pelo resto anterior e pelo algarismo que se acha sob a columna sommada. O resto da ultima subtracção deve ser zero.

Prova dos noves:

```
 24657
 46789   7
 87546   7
158992
```

Provas reaes:

```
1)  158992        2)  189        3)  189
     24657            435            435
     46789            534            534
     87546           1158           1158
    158992           1000            110
                      140
                       18
                     1158
```

SUBTRACÇÃO

47—Um operario devia 132$450 a seu patrão. Pagou-lhe 125$860. Quanto lhe deve ainda? — Responder a esta pergunta é fazer uma subtracção.

Subtracção é a operação que tem por fim, dados dois numeros da mesma especie, procurar um terceiro que, reunido ao menor, reproduza o maior dos dois numeros considerados.

O signal de subtracção é —, que se lê: *menos*.

O numero que se subtrai é o *subtrahendo*; o numero do qual se subtrai, o *minuendo*; o resultado da operação, *resto*, *excesso* ou *differença*.

SUBTRACÇÃO DE NUMEROS INTEIROS

48—Ha tres casos a considerar:

1.º) O resto e o subtrahendo só têm um algarismo;

2.º) Os algarismos do subtrahendo são eguaes aos do minuendo, ou menores que os mesmos;

3.º) Algum ou alguns dos algarismos do minuendo são maiores que os correspondentes do subtrahendo.

49—1.º *caso*. Seja para subtrahir 5 de 8. Sabemos pela taboa de addição que 5+3=8, logo 8—5=3.

50— 2.º *caso*. Escreve-se o subtrahendo sob o minuendo, de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam em columnas verticaes. A seguir faz-se a subtracção, ordem por ordem.

```
568
267
301
```

51—3.º *caso de subtracção*.

Principio. Não se altera o valor de uma differença, ajunctando o numero menor a cada um dos numeros da mesma.

(8—5) = (8+3) — (5+3)

Si se ajunctasse 3 somente ao maior, a differença augmentaria de 3 unidades; ajunctando o mesmo numero ao menor, ha compensação, e a differença não se altera.

Regra. Escreve-se o subtrahendo debaixo do minuendo, de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam em columna vertical, e sublinha-se o subtrahendo. Operando da direita para a esquerda, subtrai-se cada algarismo do subtrahendo do algarismo correspondente do minuendo. Quando uma subtracção parcial for impossivel, junctam-se 10 unidades de sua ordem ao algarismo do minuendo, e considera-se o immediato como diminuido de uma unidade. Ao envez de considerar o algarismo immediato do minuendo como diminuido de uma unidade, pode-se considerar o immediato do subtrahendo como augmentado de uma unidade.

SUBTRACÇÃO DE NUMEROS DECIMAES

52— *Regra*. Procede-se como si fossem numeros inteiros, tendo o cuidado de collocar as virgulas umas debaixo das outras. Não tendo, ambos os termos, o mesmo numero de decimaes, é precizo egualal-os.

```
2, 5 0 0 0 0
1, 9 8 7 6 5
0, 5 1 2 3 5
```

53— Provas: a) Dos noves: Tiram-se os noves do

minuendo, e, separadamente, do subtrahendo e do resto; os resultados devem ser eguaes.

b) Real; Sommam-se o subtrahendo e o resto; o resultado deve ser o minuendo.

Prova dos noves			Prova real		
	5 5 9			559	368
	3 6 8	$\frac{1}{1}$		368	191
	1 9 1			191	559

54 PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) 4,26+3,5+0,08+0,400059. 2) 39+8,4+4,005+33 +0,000640. 3) 0,84—0,79543. 4) 85—0,526. 5) (8+9) —(7—5). 6) (9—5,3)+(6,54+2,008). 7) (7—0,4)—6.

2) Uma pessôa comprou, em um armazem, 3 dz, de ovos, por 2$200; 4 latas de doces, por 3$600; 1 maço de palitos, por $400, e 2 dz. de chicaras, por 9$500; tendo dado em pagamento uma nota de 200$, quanto devia receber de troco?

2$200+3$600+$400+9$500=15$700.
200$000—15$700=184$300.

3) Um negociante vendeu de um queijo, que lhe custara 3$000: 0,2 por $800; 0,45, por 1$800, e 0,165, por $625. Quanto lhe resta do queijo? O dinheiro já feito é sufficiente para pagal-o, ou falta alguma cousa?

0,2+0,45+0,165=0,815. 1—0,815=0,185, que é quanto resta do queijo.

$800+1$800+$615=3$225. O dinheiro apurado deixa um lucro de $225.

4) João nasceu em 1818, foi baptizado aos dois annos, chrismado aos 12, casou-se aos 21 e morreu aos 83. Em que anno foi baptizado, e chrismado, e em que anno se casou, e morreu?

1818 + 2=1820. 1818 + 12=1830. 1818 + 22=1840. 1818+83=1901.

5) Recommendei a um pobre que me apparecesse todos os dias, durante uma semana, que eu lhe daria $100 no primeiro dia, e nos dias seguintes $100 mais que o dia antecedente. Tendo elle gasto, durante essa semana, $075 no primeiro dia, e cada dia seguinte $075 mais que o dia antecedente, quanto lhe restaria no fim da semana?

$100 + $200 + $300 + $400 + $500 + $600 + $700 = 2$800.

$075 + $150 + $225 + $300 + $375 + $450 + $525= 2$100. Restaram-lhe, portanto, $700.

6) Qual o numero que, sommado a 32,45, dá 69? 69—32,45=36,55.

7) Um negociante vendeu 0,15 de uma peça de fazenda, por 5$500; metade do restante, por 8$000; metade do restante, por 6$500. Quanto lhe resta da peça? Tendo ella custado 20$000, por quanto deverá vender o restante para ter um lucro total de 12$000?

0,15 + 0,425 + 0,2125 = 0,7875. 1 —0,7875 = 0,2125, quanto restava da peça.

5$500 + 8$000 + 6$500 = 20$000. 32$000 —20$000 = 12$000, por quanto devia vender o restante.

8) Uma vara de 35 porcos é augmentada de 45 porcos. Com quantos porcos ficou?

9) Colheram-se 25 laranjas, 35 pecegos, 120 jabuticabas e 12 maçãs. Quantas fructas se têm?

10) Numa cidade ha 5 ruas: a primeira de 80 metros; a segunda, de 130; a terceira, de 276; a quarta, de 128, e a quinta, de 250. Qual o comprimento total das ruas dessa cidade?

11) Um automovel percorre 8888 metros por hora. Qual o seu percurso ao fim de tres horas?

12) Um negociante fez: no primeiro dia, 76$500; no segundo, 84$400; no terceiro, 269$700; no quarto, 148$200; no quinto, 46$600; no sexto, 340$000. A quanto monta a feria dos seis dias?

13) Molière nasceu em 1622, e falleceu aos 51 annos de edade. Em que anno falleceu?

14) Um fazendeiro comprou um cavallo por 350$000, e barganhou-o por outro, voltando 120$000. Em quanto lhe ficou o segundo cavallo?

15) Uma pessôa pagou uma conta de 56$000; depois, outra de 28$000; depois, outra de 94$000; e ainda lhe restavam 22$300. Quanto tinha primitivamente?

16) Uma fazenda rendeu 32:000$000, livres. Tendo importado o custeio em 18:000$000, qual o lucro bruto?

17) Uma carroça leva 3 caixotes, pesando respectivamente 35, 44 e 90 kilos, e faltavam ainda 335 kilos para completar a lotação. Quantos kilos podia carregar a carroça?

18) Pedro nasceu em 1888. Que edade terá elle em 1950?

19) Uma familia dispendeu 550$000 num mez. Sendo de 333$000 o ordenado do chefe da mesma, de quanto deverá elle reduzir as despezas, para equilibral-as com a receita?

20) Numa cesta que continha 225 ovos, restam 87. Quantos ovos foram vendidos?

21) Uma mesa e seis cadeiras valem 110$000. Valendo a mesa 52$000, quanto valem as cadeiras?

22) Um caixão pesa, quando cheio, 237 kilos; vasio, 25. Qual o peso do conteúdo?

23) Si um galpão tivesse 2,m25 a mais, elle teria 33 metros. Qual o seu comprimento?

24) Um senhor deixou uma fortuna de 136:500$000. Destinando elle 24:335$000, para legados, qual a parte dos herdeiros?

25) Um rebanho continha 449 carneiros. Venderam-se, primeiro, 105 carneiros, e, depois, 224. Quantos carneiros tem o rebanho?

26) Numa familia, o pai ganha 5:400$000 por anno; a mãe, 2:900$000 menos que o pai, e o filho 1:300$000 menos que a mãe. Qual o salario annual da familia?

27) A somma de quatro numeros é de 653. O segundo é 3 centenas menor que o primeiro, e o terceiro 3 dezenas menor que o segundo. Qual o terceiro?

28) Uma pessôa devia 900$000. Tendo feito o pagamento, primeiro, de 150$000, depois, de 180$000, quanto resta a pagar?

29) Uma pessôa comprou uma calça por 25$000, um par de botinas, por 28$000, e 5 ceroulas, por 20$000. Tendo dado uma nota de 100$000, quanto deve receber de troco?

Multiplicação de inteiros e decimaes. Problemas e questões práticas

55) Exemplo: Um fazendeiro vende 18 carneiros a 7$500 cada um. Saber em quanto importaram, é effectuar uma multiplicação.

Multiplicar é repetir um numero tantas vezes quantas fôrem as unidades do outro. Ou: é procurar um 3.º numero (producto) que esteja para o 1.º (multiplicando) como o 2.º (multiplicador) está para a unidade.

O signal de multiplicação é ×, que se lê: *multiplicado por*.

O numero que se multiplica chama-se *multiplicando*; o numero pelo qual se multiplica, *multiplicador*; o resultado da operação, *producto* ou *total*. O multiplicando e o multiplicador são chamados *factores*.

56) Multiplicar um numero:

por 2, é dobral-o ou duplical-o, tomar-lhe o *dobro*;
» 3, » triplical-o, tomar-lhe o triplo;
» 4, » quadruplical-o, tomar-lhe o quadruplo;
» 5, » quintuplical-o, tomar-lhe o quintuplo;
» 6, » sextuplical-o, tomar-lhe o sextuplo;
» 7, » septuplical-o, tomar-lhe o septuplo;
» 10, » decuplical-o, tomar-lhe o decuplo;
» 100, » centuplical-o, tomar-lhe o centuplo.

57) *Quadrado* e *cubo*. *Quadrado* de um numero é o producto do numero por si mesmo. O quadrado de 6 é $6 \times 6 = 36$. *Cubo* é o producto de um numero por si mesmo duas vezes. O cubo de 7 é $7 \times 7 \times 7 = 343$.

Potencia de um numero é o producto de factores eguaes a esse numero: $5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

58) *Raiz quadrada*. *Raiz cubica*. *Raiz quadrada* de um numero é o numero que, multiplicado por si mesmo, reproduz o numero dado. A raiz quadrada de 64 é 8, porque $8 \times 8 = 64$. *Raiz cubica* de um numero é o numero que, multiplicado por si mesmo duas vezes, reproduz o numero dado. A raiz cubica de 125 é 5, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

MULTIPLICAÇÃO DE INTEIROS

59) Ha tres casos a considerar:

1.º) o multiplicando e o multiplicador não têm mais que um algarismo;

2.º) o multiplicando tem diversos algarismos e o multiplicador um só;

3.º) o multiplicador é um algarismo significativo seguido de zeros;

4.º) o multiplicando e o multiplicador têm diversos algarismos.

60) *1.º caso.* Regra. Sommam-se tantas parcellas eguaes ao multiplicando quantas são as unidades do multiplicador. Ou : procura-se na 1.ª columna horizontal da taboa de Pythagoras um dos factores, e na 1.ª columna vertical, o outro ; o numero que se achar no cruzamento representa o producto de ambos.

Taboa de Pythagoras

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A 1.ª columna horizontal é formada pelos primeiros numeros.

A 2.ª é formada pela duplicação dos numeros da 1.ª linha.

A 3.ª é formada pela reunião dos numeros da linha 1.ª e da 2.ª.

A 4.ª pela reunião dos numeros da 1.ª e 3.ª.

A 5.ª pela reunião dos numeros da 1.ª e 4.ª, e assim por diante.

61) *2.º caso.* Para se multiplicar um numero composto por um simples, sommam-se tantas parcellas eguaes ao numero composto quantas são as unidades do numero simples. $458 \times 3 = 458 + 458 + 458 = 1374$. Ora : sommar 3 vezes

8 unidades, é multiplicar 8 unidades por 3 ; sommar 3 vezes 5 dezenas, é multiplicar 5 dezenas por 3 ; sommar 3 vezes 4 centenas, é multiplicar 4 centenas por 3. Isto equivale a dizer : 3 vezes 8 unidades são 24 unidades, ou 2 dezenas e 4 unidades : escrevo 4 unidades e retenho 2 dezenas; 3 vezes 5 dezenas são 15 dezenas, ou 1 centena e 5 dezenas : escrevo 5 dezenas e retenho 1 centena ; 3 vezes 4 centenas são 12 centenas$+1=13$ centenas, que escrevo.

Regra. Escreve-se o multiplicador sob o multiplicando, e faz-se a operação multiplicando aquelle successivamente pelos algarismos deste, a partir do 1.º á direita. As unidades superiores assim obtidas reservam-se mentalmente, para junctar na multiplicação parcial immediata, excepto as da ultima multiplicação, em que se escrevem por inteiro.

62) *3.º caso. Regra.* Faz-se a multiplicação, como si os zeros não existissem, e junctam-se, ao total, os zeros omittidos.

$345 \times 600 = 345 \times 6 \times 100.$

63) *4.º caso.* Decompõe-se o multiplicador em suas unidades, opera-se como no 3.º caso e sommam-se os productos obtidos. Seja para multiplicar 389 por 239 ; temos :

$$\begin{array}{r} 389 \times \ \ \ 9 = \ \ 3.501 \\ 389 \times \ 30 = 11.670 \\ 389 \times 200 = 77.800 \\ \hline 92.971 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 389 \\ 239 \\ \hline 3501 \\ 1167\ \\ 778\ \ \\ \hline 92971 \end{array}$$

Nota-se que se pode dispensar de escrever os zeros do 2.º e do 3.º producto, bastando que os productos parciaes respectivos se escrevam em correspondencia com os algarismos do multiplicador, donde a

Regra. Multiplicam-se successivamente os algarismos do multiplicador pelo multiplicando, tendo o cuidado de collocar o 1.º algarismo de cada producto parcial em correspondencia com o algarismo respectivo do multiplicador. Sommam-se os productos parciaes e tem-se o producto total.

PRINCIPIOS RELATIVOS Á MULTIPLICAÇÃO

64) *1.º principio.* Um producto de dois factores não se altera, invertendo-lhes a ordem. $3 \times 4 = 4 \times 3$.

3×4 . . . .
. . . .
. . . .
4×3

Contando por linhas horizontaes, têm-se 3 linhas, cada uma de 4 pontos, donde 4×3. Contando por linhas verticaes, têm-se 4 linhas, cada uma de 3 pontos, donde 3×4. Sendo constante o numero de pontos, $4\times3=3\times4$.

65) *2.º principio.* Um producto de tres factores não se altera, invertendo a ordem dos dois ultimos. $3\times5\times4=3\times4\times5$.

O producto de 3 por 5 se obtem sommando 5 parcellas eguaes a 3 : $3+3+3+3+3$, e como esse producto deve ser repetido 4 vezes, temos :

$3\times4\times5$

$3+3+3+3+3$
$3+3+3+3+3$
$3+3+3+3+8$
$3+3+3+3+3$

$3\times5\times4$

Contando por linhas horizontaes, têm-se 4 linhas de 3×5, donde $3\times5\times4$; contando por linhas verticaes, têm-se 5 linhas, cada uma de 3×4, donde $3\times4\times5$. Assim, $3\times5\times4=3\times4\times5$.

66) *3.º principio.* Um producto de varios factores não se altera, invertendo a ordem de dois factores consecutivos quaesquer. $3\times4\times5\times6=3\times5\times4\times6$.

Considerando só os tres primeiros factores, tem-se : $3\times4\times5=3\times5\times4$, de accordo com o principio anterior. Multiplicando ambos os membros desta egualdade, por 6, tem-se : $3\times4\times5\times6=3\times5\times4\times6$.

67) *4.º principio.* Um producto de diversos factores não se altera invertendo, de qualquer maneira, a ordem dos factores.

Com effeito, temos, de accordo com o principio anterior : $3\times4\times5\times6\times8=3\times4\times6\times5\times8=3\times6\times4\times5\times8=6\times3\times4\times5\times8=6\times3\times4\times8\times5$, e assim por diante.

Consequencias :

1.ª) Num producto de diversos factores, podem-se substituir alguns dos factores por seu producto effectuado, e inversamente : $3\times5\times7\times6=105\times6=3\times35\times6=3\times210=18\times35=3\times7\times30$...

2.ª) Para multiplicar um producto de diversos factores, por um numero, basta multiplicar um qualquer dos factores pelo numero: $(3\times5\times9)\times4=3\times4\times5\times9=3\times5\times4\times9$.

68) *5.º principio.* Para multiplicar uma somma não effectuada por um numero, é precizo multiplicar todas as parcellas por este numero.

$$(5+4+7)\times3=(5\times3)+(4\times3)+(7\times3).$$

Com effeito $(5+4+7)3$ significa $(5+4+7)$ repetidos 3 vezes, isto é

$$\begin{array}{ccccc} 5 & + & 4 & + & 7 \\ 5 & + & 4 & + & 7 \\ 5 & + & 4 & + & 7 \\ \hline 5\times3 & + & 4\times3 & + & 7\times3. \end{array}$$

69) *6.º principio.* Para multiplicar uma differença por um numero, é precizo multiplicar as duas partes da differença pelo numero

$$(8-5)\times3 = (8\times3) - (5\times3),$$

Com effeito: multiplicar $(8-5)$ por 3 equivale a repetir $(8-5)$ tres vezes :

$$\begin{array}{ccc} 8 & - & 5 \\ 8 & - & 5 \\ 8 & - & 5 \\ \hline 8\times3 & - & 5\times3. \end{array}$$

70) *7.º principio.* Para multiplicar uma somma de dois numeros por outra somma de dois numeros, é precizo multiplicar a somma multiplicando pelas duas partes do multiplicador, cada uma por sua vez.

$$(4+2)\times(5+6) = (4+2)\times5+(4+2)\times6$$

71) *8.º principio.* O producto de diversas potencias de um numero tem por expoente a somma dos expoentes dos factores.

Expoente é o numero que, collocado á direita e um pouco acima do numero, indica a potencia a que o mesmo foi elevado.

$$5^2\times5^4\times5^6=5^{12}$$

Com effeito : $5^2=5\times5$
$5^4=5\times5\times5\times5$
$5^6=5\times5\times5\times5\times5\times5$
$5^2\times5^4\times5^6=5\times5\times5\times5... =5^{12}$

72) Na multiplicação de decimaes, podem-se dar os seguintes casos: multiplicar

a) um numero decimal por um numero inteiro, e vice-versa ;

b) um numero decimal por outro.

Em qualquer caso, procede-se de accordo com a regra

seguinte: Multiplicam-se como si fossem inteiros, e no producto separam-se, com a virgula, tantos algarismos quantos são os decimaes de ambos os factores.

73. *Provas*: a) Dos noves: Tiram-se os noves ao multiplicando e ao multiplicador; multiplica-se o resultado e tiram-se os noves ao producto; o resultado deve ser egual ao que se obtém tirando-se os noves ao producto total.

b) Real: Inverte-se a ordem dos factores, e o producto deve ser o mesmo.

Prova dos noves:

```
    4458
    3076
   -----
   26748   3 | 3
  31206    --+--
 13374     7 | 3
--------
13712808
```

Prova real:

```
    3076
    4458
   -----
   24608
  15380
 12304
12304
--------
13712808
```

74. *Problemas e questões práticas*:

1) 0,049 × 0,0006. 2) 37 × 0,4008. 3) (0,8 + 2,04) × (3 — 2,987). 4) (4—2,3) × (0,8 + 3,2).

2) Um chapéo custa 12$500; qual será o preço de uma duzia e meia, havendo o abatimento de 12$000 em cada duzia?

(12$500 × 18)—(12$000 + 6$000) = 207$000.

3) Quanto ganha, por anno, um operario que percebe diariamente 3$500 e que trabalha 26 dias por mez?

(26 × 12) × 3$500 = 1:092$000.

4) Tendo a hora 60 minutos e o minuto 60 segundos, quantos segundos tem um dia? (60 × 60) × 24 = 86400.

5) Quantos são 0,15 de 0,75? 0,15 × 0,75 = 0,1125.

6) Um negociante comprou 20 saccas de trigo de 35 Kg. cada uma, ao preço de 9$500; tendo encontrado 50 Kg. estragados, pergunta-se a como deve vender o restante, para ganhar 20 °/° ?

(35 × 20) — 50 = 650, quantidade de trigo que lhe resta.

20 × 9$500 = 190$000 + 38$000 (20 °/°) = 228$000, importancia por que a deve vender.

7) Um negociante comprou 12 peças de fazenda, de 40 metros cada uma, a 5$500 o metro. Tendo revendido 280 metros a 7$800, e tendo sido roubado o restante, elle quer saber si teve algum prejuizo.

(5$500 × 40 × 12) — (7$800 × 280) = 456$000, prejuizo que teve.

8) Effectuar as seguintes operações:

360.005 × 5,43; 3698,5 × 0,004; (2,8 × 0,20)×(300,85 — 2,30008); (3,725 × 2,04 × 0,008 × 4,00006) × 32; (4,08 × 7,53 × 0,00246) × (350,004 — 200,456789); (360,07524, 56004 × 37,89) × 4,0085.

9) Quantas laranjas ha em quatro saccos, tendo 85 cada um?

10) Um operario guarda $800 por dia. Quanto terá ao fim de 15 annos?

11) Custando uma garrafa de vinho 1$200, quanto custam 12 duzias?

12) Uma pessôa compra 7 cestas de ovos, com 5 duzias cada uma. Custando um ovo $120, quanto deve pagar?

13) Qantos minutos ha em 1 dia? quantas horas num mez? guantos mezes em 18 annos? quantos segundos em 4 annos?

14) Dobrar, triplicar, quadruplicar, centuplicar, os numeros seguintes: 18 laranjas; 46 peras; 7$580; 120, 06.

15) Quantas pennas ha em 5 caixas de 120 pennas? em 6 caixas de 148? em 35 caixas de 80?

16) Quanto custam $16^{m},50$ de chita, a $750 o metro?

17) Quanto custam 3 Kg. 500 de carne, a 1$700 o kilo?

18) Quanto vale um terreno de 420 metros quadrados de area, sendo de 4$500 o valor do metro quadrado?

19) Multiplicar 65,04 por 0,01; 4,23 por 0,001; 8,05 por 10000.

20) Numa fabrica trabalham 15 homens e 25 mulheres. Quanto é precizo para lhes pagar 26 dias de trabalho, sendo que os homens ganham 5$500 por dia, e as mulheres, 4$300?

21) Com uma peça de fazenda de 60 metros a 7$600, um alfaiate fez 10 ternos a 120$000, 5 calças a 28$000 e 8 sobrecasacas a 68$000. Quanto teve de lucro?

22) Um tonnel contem 200 litros de vinho a $700. Tiram-se-lhe 70 garrafas de $0^{l},60$, e depois 80 garrafas de $0^{l},70$. Quanto resta no tonnel? Tendo-se vendido as garrafas umas pelas outras, a 1$100, teve-se já algum lucro?

23) Uma pessôa deve 850$000. Tendo dado, em pagamento, 5 prestações de 35$000, 17 dias de serviço a 6$500 e 75 horas a $900, quanto deve ainda?

24) Um operario ganha 4$500 por dia, e envia a sua familia, mensalmente, 85$000. Trabalhando elle 26 dias por mez, quanto lhe resta ao fim do anno ?

25) Uma peça de fazenda tinha 43^{m},50. Tendo-se vendido 18^{m},70, calcular o preço do restante, a 6$500 o metro.

26) Dando-se uma nota de 100$000, em pagamento de 25 frangos a 1$600 quanto se deve receber de troco ?

27) Um fazendeiro vendeu 18 carneiros a 7$500, e comprou 6 duzias de frangos, a 1$400. Resta-lhe alguma cousa do que recebeu ?

28) Um fazendeiro vendeu 12 porcos a 35$000, e recebeu, em pagamento, 35 alqueires de milho a 3$600, e uma peça de fazenda de 18,^{m}50, a 3$500 o metro. Recebendo ainda uma nota de 500$000, quanto deve voltar ?

Divisão de inteiros. Problemas e questões práticas.

75). Exemplo. Distribuir 100 laranjas por 5 meninos, é fazer uma divisão.

Dividir é repartir um numero, chamado dividendo, em tantas partes eguaes quantas são as unidades de um outro, chamado divisor. Ou : é procurar quantas vezes um numero, chamado dividendo, contem outro, chamado divisor.

O signal de divisão é :, que se lê *dividido por*.

O numero que se divide chama-se *dividendo*; o numero pelo qual se divide, *divisor*; o resultado da operação, *quociente*.

76. Na divisão de inteiros ha quatro casos a considerar :

1.º) O divisor só tem um algarismo e o dividendo é menor que 10 vezes o divisor (68 : 9);

2.º) O divisor só tem um algarismo e o dividendo é maior que 10 vezes o divisor (68 : 5);

3.º O divisor tem mais de um algarismo e o dividendo é menor que 10 vezes o divisor (114 : 24);

4.º) O divisor tem mais de um algarismo e o dividendo é maior que 10 vezes o divisor (214 : 18).

77) *1.º caso.* Pode-se achar o quociente por subtracções successivas (28 : 7=28—7= 21 ; 21 — 7= 14 ; 14 —7= 7; 7 — 7=0), ou pela taboa de multiplicação (procurando o maior numero que, multiplicado por 7, fosse egual a 8, ou pudesse ser subtrahido delle).

78) *2.º caso.* Decompõe-se o dividendo em suas unidades, e procede-se como no 1.º caso.

79) *3.º caso.* Neste caso, como no 1.º, o quociente só tem um algarismo. Para achal-o, toma-se o 1.º algarismo do divisor e divide-se por elle o numero de unidades da mesma especie do dividendo. Para verificar si o quociente achado é sufficiente, multiplica-se elle pelo divisor e o producto subtrai-se do dividendo. O resto, si houver, deve ser menor que o divisor.

80) *4.º caso.* E' o 3.º caso repetido. Obedece-se á seguinte :

Regra : Escreve-se o divisor á direita do dividendo, separado pela chave de divisão. Marca-se no dividendo o mesmo numero de algarismos do divisor, e mais um, si o numero marcado for insufficiente. Divide-se este dividendo parcial pelo divisor, obtendo-se o 1.º algarismo do quociente, que se multiplica pelo divisor e se subtrai desse 1.º dividendo. O resto, juncto ao algarismo seguinte, constituirá o 2.º dividendo parcial, que, dividido pelo divisor, dará o 2.º algarismo do quociente, que se multiplica pelo divisor e se subtrai do 2.º dividendo parcial ; e assim por diante.

Si um dividendo parcial não contiver o divisor, o algarismo correspondente do quociente será zero, e baixa-se o algarismo seguinte do dividendo, para formar o dividendo parcial seguinte.

```
64532 | 465
1803    138,77
 4082
  3620
   3650
    395
```

Nota : Pode-se obter o quociente com a approximação que se quizer ; para isto, basta ir accrescentando zeros aos restos, e collocar uma virgula no quociente, logo que se começar a approximação.

81) *Provas* : a) Dos noves : Tiram se os noves ao divisor, e, separadamente, ao quociente ; multiplicam-se os resultados e tiram-se os noves ao producto e ao resto ; este resultado deve ser egual ao que se obtem tirando-se os noves ao dividendo.

b) Real : Multiplica-se o divisor pelo quociente e somma-se ao resto da divisão, si houver.

Provas dos noves

```
46742 | 63
  264   741     0 | 5
  122           3 | 5
   59
```

Prova real

```
46742 | 63
  264   741
  122    63
   59  ----
       2223
      4446
     -----
     46683
        59
     -----
     46742
```

PRINCIPIOS

82) *1.º principio.* Quando se multiplica o dividendo por um numero inteiro, a parte inteira do quociente fica multiplicada por esse numero.

De facto, si o dividendo se torna 3 vezes maior, por exemplo, o divisor estará contido 3 vezes mais no novo dividendo ; o quociente ficará, pois, 3 vezes maior.

83) *2.º principio.* Quando se multiplica o divisor só, por um numero inteiro, a parte inteira do quociente fica dividida por esse numero.

Com effeito, si o divisor se torna 3 vezes maior, elle estará contido 3 vezes menos no dividendo, que não mudou.

Consequencia :

Multiplicando-se o dividendo e o divisor pelo mesmo numero, o quociente não se altera, pois ha compensação.

Demonstra-se, analogamente : que um quociente não muda quando se divide o dividendo e o divisor pelo mesmo numero.

84) *3.º principio.* Quando se multiplica ou se divide o dividendo e o divisor pelo mesmo numero, o quociente não se altera ; mas o resto, si houver, apparece multiplicado ou dividido por esse mesmo numero.

Com effeito :

Dividendo = (quociente × divisor) + o resto.

Multiplicando ambos os membros dessa egualdade por 5, tem-se :

Dividendo × 5 = (quociente × divisor) × 5 + (resto × 5) = (divisor × 5) × quociente + (resto × 5), egualdade que mostra que, si se divide o dividendo × 5 pelo divisor × 5, obtem-se o mesmo quociente, mas que o resto fica multiplicado por 5.

$$\frac{\text{Dividendo}\times 5}{\text{divisor}\times 5}=\text{quociente}+\text{resto}\times 5.$$

Este resto que augmenta não excederá nunca o divisor, porque si

1 vez o resto é menor que 1 vez o divisor,

5 vezes o resto serão menores que 5 vezes o divisor.

85) *4.º principio.* Para dividir por um numero qualquer uma somma indicada, divide-se cada uma das parcellas por esse numero, e sommam se os quocientes parciaes.

$(8+16+24) : 8=8:8+16:8+24:8$. Ficando as parcellas divididas por 8, fica-o tambem a somma.

86) *5.º principio.* Para dividir por um numero uma differença, divide-se o minuendo e o subtrahendo por esse numero, e subtraem-se os quocientes obtidos.

$(40-16) : 4=40:4-16:4$. Multiplicando o divisor (4) pelo quociente $(40:4-16:4)$, obtem-se $40-16=$ o dividendo.

87) *6.º principio.* Para dividir um quociente não effectuado por um numero, pode-se multiplicar o divisor por este numero.

Com effeito, seja o quociente $\frac{120}{6}:5$. Ora, dividir o quociente dado por 5 é tornar aquelle 5 vezes menor, o que se pode fazer multiplicando o denominador por 5 : $\frac{120}{6}:5=\frac{120}{6\times 5}$.

88) *7.º principio.* Para dividir um numero por um producto de dois factores, pode-se dividir o dividendo por um dos factores e o quociente obtido pelo outro factor.

Com effeito $\frac{120}{6\times 5}=\frac{120}{6}:5$

89) *8.º principio.* Para dividir um producto de diversos factores por um numero, basta dividir um qualquer desses factores por este numero, e multiplicar o quociente obtido pelo producto dos outros factores.

E' o inverso da consequencia 2.ª do n. 67.

$$\frac{3\times 8\times 5\times 2}{4}=\frac{8}{4}\times 3\times 5\times 2.$$

90) *9.º principio.* Para dividir um producto por um de seus factores, basta supprimir este factor.

$$\frac{3\times8\times5\times2}{5}=\frac{5}{5}\times3\times8\times2.$$

91. *Caracteres de divisibilidade. Numero multiplo* é o que tem outros divisores além de si mesmo e da unidade: 15, 24, 46; numero *primo*, o que só é divisivel por si mesmo e pela unidade: 3, 11, 23. *Primos entre si* são dois ou mais numeros que só têm por divisor commum a unidade.

Os caracteres de divisibilidade são:

a) Todo numero par é divisivel por 2;

b) Todo numero cuja somma de seus algarismos for divisivel por 3 ou por 9, será divisivel por estes numeros;

c) Todo numero cujos dois ultimos algarismos são zeros ou formam numero divisivel por 4, será divisivel por 4;

d) Todo numero que terminar em 5 ou 0, será divisivel por 5;

e) Todo numero divisivel por 2 e por 3, é-o por 6;

f) Divide-se o numero em classes de 3 algarismos; multiplicam-se as unidades, as dezenas e as centenas de cada classe respectivamente por 1, por 3 e por 2; sommam-se os productos das classes pares e os das classes impares, separadamente. Si a differença destes productos for 7, ou multiplo de 7, o numero considerado é divisivel por 7;

g) Todo numero cujos 3 ultimos algarismos forem zeros ou formarem um numero divisivel por 8, será divisivel por 8;

h) Todo numero terminado em 0 é divisivel por 10;

i) Todo numero cuja differença entre a somma dos algarismos da ordem par e a da ordem impar formar um numero divisivel por 11, será divisivel por 11;

j) Todo numero divisivel por 3 e por 4, é-o por 12.

92) PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) Custando 18 metros de fazenda 31$500, quanto custa cada metro? 31$500:18=1$750.

2) Custando uma dz. de ovos $900, quantas dzs. comprarei com 25$725? 25$725:900=28 dzs., restando $525. 900;12=$075, preço de cada ovo. 525:75=7 ovos. Resp.: 28 dzs. e 7 ovos.

3) Si 8 homens gastam junctos 570$000 por mez, quanto gastarão 3 homens em um dia? E 1 homem em um anno?

570$000:30=19$000. 19$000:8=2$375. 2$375×3=7$125. 2$375×30×12=855$000.

4) Um instituto no qual os cursos duram 9 mezes, teve, no ultimo anno, 120 alumnos, dos quaes 5 ficaram 3 mezes; 35, 7 mezes; os restantes, os 9 mezes. Tendo sido a receita de 117:600$000, pergunta-se o preço da pensão annual (9 mezes).

(5×3)+(35×7)+(80×9)=980.

117:600$000:980=120$000.

120$000×9=1:080$000.

5) Effectuar as seguintes operações:

2694 : 89 ; 459 : 36874 ; (853 + 45) : 76 ; 84321 : (645—79) ;

$$\frac{(765\times89)+3}{14};\quad \frac{(896+15)+(184+3)}{47\ \frac{864}{8}};\quad \frac{2345-\left(\frac{475}{47}-5\times3\right)}{\frac{964}{4}}.$$

6) Uma lampada electrica fica accesa 5 horas por dia, durante 26 dias no mez. Marcando o relogio 18 kilowats, quanto se gastou por dia?

7) Um negociante vendeu, durante 6 dias de uma semana, respectivamente: 61$200; 148$200; 39$600; 44$200; 28$000; 266$400. Qual foi sua media diaria?

8) Um operario trabalhou, num anno: 65 dias, a......... 6$500; 18 dias, a 7$600; 52 dias, a 8$500; os dias restantes a 4$500. Qual foi seu ganho medio diario?

9) Um negociante mistura 25 kilos de café de 1$200 com 34 Kg. de café de $700. Querendo ganhar $300 em cada kilo da mistura, a como deve vendel-a?

10) Um credor recebeu, em pagamento de um debito de 450$000, 18 carneiros a 7$500, e o restante em milho, a 4$200 o alqueire. Quantos alqueires de milho recebeu?

11) Um casal ganha, por mez, 825$000, e economiza 3:250$000 por anno. Quanto gasta por mez? Em quantos annos, mezes e dias conseguirá economizar 50:000$000?

12) Um fazendeiro quer trocar 65 alqueires de batatinha, a 4$500 o alqueire, por feijão, a 6$700. Quanto deve receber de feijão?

13) Uma familia de 5 pessôas gasta 2:350$000 em 4 mezes. Augmentando a familia de 3 pessôas, qual será sua despeza em 70 dias?

14) Quatro pessôas herdaram uma casa, que rende 345$000, por trimestre, de aluguel. Os impostos e as despesas de reforma consomem annualmente $\frac{1}{5}$ da renda annual. Qual é a renda liquida mensal de cada herdeiro?

15) 10 operarios deviam cavar um fosso de 450 metros de comprimento, em 5 dias. Todos operarios, porém, não puderam trabalhar; os que trabalharam, tiveram de fazer 6 metros a mais por dia, para fazer a obra nos 5 dias. Quantos operarios trabalharam?

16) Dividem se 2:238$000 entre 2 pessôas, de forma que uma receba 5 vezes mais que a outra. Quanto deve receber cada uma?

17) Repartir 4:460$000 entre 1 homem, 2 mulheres e 5 crianças, de forma que cada mulher recebe 3 vezes mais que cada criança, e que o homem receba 2 vezes mais que cada mulher. Quanto deve receber cada um?

18) Um vendedor de gallinha tem 45 gallinhas que lhe deram 62 ovos cada uma, num anno. Elle vende os ovos a $800 a duzia, mas dá 13 por 12. Quanto lhe rendem as gallinhas, sabendo-se que elle dispende com ellas, diariamente, $200?

19) Um pai de familia faz, diariamente, 2 horas de trabalho supplementar. Quantos dias representa este trabalho, ao cabo de um anno de 309 dias? Quanto vale este trabalho, á razão de 4$500 por dia de 8 horas?

20) Distribuindo-se 2450 pennas entre 3 meninos, de sorte que o primeiro receba 220 mais que o segundo, e este 60 mais que o terceiro, quanto deve receber cada um?

21) Partilhar 250 laranjas entre 3 meninos, de sorte que o primeiro receba o dobro do segundo, e este o triplo do terceiro.

22) 35 hectolitros de batatas, compradas por 600$000, foram revendidos a 3$500 o hectolitro. Calcular o lucro por litro.

23) Custando um caderno $250, quantos cadernos se podem comprar com 50$000?

24) Pesando o hectolitro de trigo 75 kilos, a quantos hectolitros correspondem 3280 kilos de trigo?

25) Dividiram-se 214 laranjas entre um certo numero de meninos; faltaram 10 laranjas, para poder dar 18 a cada um. Qual era o numero de meninos?

26) Vendendo-se um terreno por 2:250$000, perder-se-ia a terça parte dessa quantia. Quanto custára o terreno?

Divisão de fracções decimaes. Problemas e questões práticas.

93) Na divisão de decimaes, ha dois casos a considerar:

a) o dividendo e o divisor são decimaes;

b) o dividendo, ou o divisor, não é decimal.

94) *Regras*:

1.º caso: Tendo ambos o mesmo numero de decimaes, supprimem-se as virgulas e procede-se como si fossem numeros inteiros. Sendo desegual o numero de decimaes, accrescentam-se zeros, afim de egualal-os, supprimem-se as virgulas e procede-se como si fossem inteiros.

2.º caso: Accrescentam-se tantos zeros ao inteiro quantos os decimaes da fracção, supprime-se a virgula e procede-se como si fossem inteiros.

Exemplos:

1.º caso. 35,0864:3,0058; 9,8:2,00485; 0,15:0,2.

```
350864 | 30058         980000 | 200485      150 | 20
 50284   11,6         1780600   4,8         100   0,75
202260                 176720                 0
 21912
```

2.º caso: 156:0,03; 8,6:4200.

```
15600 | 3          86400 | 20000
   06   5200.      64000   0,0432
   00              40000
   00                  0
```

95) PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) 74,068:2,68.
2) 7,7:0,0468.
3) 45,6:100.
4) 9:0,089.
5) 0,089:9.
6) 45,6:10000
7) 48564:94,6

8) Custando 1 queijo 2$500, quanto custarão 0,25 do mesmo?

$(2500 \div 100) \times 0,25 = \$625.$

9) Dividindo uma laranja e meia por 4 meninos, quanto receberá cada um?

1,5:4 = 0,375.

10) Custando 0,2 de um leitão, 1$500, quanto custarão 0,024 do mesmo?

01=$750. 0,01=$075. 0,001=$0075. 24×$0075=$180.

11) Duas irmãs herdaram a mesma importancia. No fim de alguns annos, a primeira tinha augmentado seu capital de 0,45, emquanto que a segunda tinha gasto 0,75 do seu; a mais velha tinha então 42:600$000 mais que sua irmã. Qual foi a herança e qual o capital que cada irmã possuia?

1+0,45=capital da mais velha. 1−0,75=0,25=capital da mais moça. 1,45−0,5=1,20=differença do capital. 1,90=42:600$000; portanto, dividindo-se esta importancia em 120 partes de 0,01, e tomando-se 100 destas partes, tem-se a herança; esta, mais 0,45=capital da mais velha, e 0,25 della=capital da mais moça.

42:600$000 : 120=355000. 355000×100=35:500$000 — capital. 35:500$000 + 15:975$000 (os 0,45) = 51:475$000 — capital da mais velha. 0,25 de 35:500$000 = 8:875$000 — capital da mais moça.

12) Effectuar as seguintes operações:

4,076:32 ; 86,05:3,2 ; 7,0045:3,028964 ; 36,8:10 ;

4,5:100 ; 0,0000:2,4 ; 384:2,9304; $\frac{(7,2+16)\times 4,4}{28,5}$;

$\frac{(45,06+7,0865)\times(2,04+36,5)}{10,89}$; + $\frac{3,58\times(2,04+1,009)}{12,006+3,04569}$

13) Quantos alfinetes de $0^m,025$ poderiam ser feitos com um fio de latão de $25^m,80$?

14) Gastando-se $805^g,50$ de assucar por dia, quanto tempo durariam 5 saccas de 60 kilos cada uma?

15) Misturaram-se 184 litros de vinho de 1$200 com $130^l,40$ de vinho de $600 e com $40^l,50$ de agua. A como se deve vender a mistura, para ter um lucro total de 120$?

16) $15^m,80$ de fazenda custaram o mesmo que $18^{alq},50$ de feijão, a 6$600. Quanto vale o metro da fazenda?

17) Um negociante comprou uma peça de fazenda de $60^m,50$. Revendendo $35^m,40$ por 162$840, elle ganha 1$200 por metro. Quanto lhe custou o metro da fazenda? A como

deve revender o restante, para ganhar mais $900 em metro do que na venda dos $35^m,40$?

18) Um negociante revendeu de uma peça de fazenda, medindo $65^m,60$: $16^m,50$, a 1$200; $11^m,80$, a 1$600; o restante, a $900. Qual foi o preço medio do metro? Tendo-lhe custado 85$000 a peça, a como deve revender o restante para ter um lucro total de 140$000?

19) As rodas de uma carroça têm $4^m,60$ de circumferencia. Quantas voltas hão de dar para percorrer $3689^m,804$?

20) Qual o numero que, multiplicado por 65,486, dará 4896,5 no producto?

21) Qual o numero cujos 66 centesimos valem 805,2?

22) Os 65 centesimos de uma peça de fazenda custam 52$000. Qual o preço da peça inteira? Qual seu comprimento total, sabendo-se que o metro vale 2$500?

23) Tirando-se, a uma pipa cheia, 76 litros do seu conteúdo, este diminui de 28 centesimos. Qual a capacidade da pipa?

24) Um negociante comprou 9 peças de fazenda de $35^m,40$ cada uma, e revendeu-as por 2:500$000, ganhando, na transacção, 466$200. Quanto lhe custou cada metro?

25) Um negociante dividiu uma peça de fazenda de $68^m,40$ em córtes de $3^m,50$, que vende a 10$000. Qual o preço do metro? e o de toda a peça?

26) Um negociante vendeu de uma peça de fazenda: $8^m,80$ a 7$500; $15^m,40$ a 6$600; $17^m,90$, a 5$000. Com o dinheiro apurado comprou 25 duzias de ovos a 1$100, 18 frangos a 1$200, e emprestou 30$000 a um amigo. Com quanto ainda ficou? Quantos metros de fazenda a 2$300 cada 0,75 centimetros poderia comprar com esta importancia?

27) 4 saccas de arroz, contendo cada uma $68^l,80$, custam 95$600. Quanto custa cada litro?

28) Tomar a metade de $17^g,03$; o quarto de $147^l,0048$; o oitavo de $2^m,488$.

29) Quantas vezes estão: 3 em 18,67 ? 94,2 em 19 ? 3,05 em 18 ? 2,24 em 14,4 ?

30) Um açougueiro deu, em pagamento de $40^{kg},500$ de pão a $400 o Kg, $18^{kg},400$ de carne. A como ficou o kilo desta?

31) Duas peças de panno da mesma fazenda custaram respectivamente 65$000 e 53$400; a primeira tem $14^m,85$ mais que a segunda. Qual é o comprimento de cada peça?

Numeros primos. Decomposição de um numero em seus factores primos e multiplos.

95) *Numero primo* é que só é divisivel por si mesmo ou pela unidade : 7, 11, 23.

Primos entre si são dois ou mais numeros que só têm por divisor commum a unidade : 5 e 9 ; 7, 16, 23 e 25.

96) Para se reconhecer si um numero é primo, divide-se elle pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, até se achar por quociente um numero egual ou inferior ao divisor experimentado. Si nenhuma divisão se fizer exactamente, o numero dado é primo.

97) *Tabella de numeros primos.* Para se organizar uma tabella de numeros primos, até 100, por exemplo, escreve-se a serie natural dos numeros até ao limite dado ; depois, cancellam-se a partir de 2, de 3, de 5, de 7, de 11, os multiplos desses numeros, excepto elles proprios. Feitos os cancellamentos, verifica-se que os numeros primos até 100, são : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

98) A operação está terminada quando se devem cancellar os multiplos de um numero cujo quadrado é superior ao limite dado.

99) *Decompor um numero em seus factores primos.* Para esse fim, divide-se o numero proposto pelos numeros primos que o dividem exactamente, tantas vezes quantas possivel, começando pelos menores :

2772	2
1385	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

e se tem :

$$2772=2^2\times3^2\times7\times11$$

100) *Achar todos os divisores de um numero.* Para esse fim decompõe-se o numero em seus factores primos, e depois effectuam-se todas as combinações possiveis destes factores, sem repetil-os mais vezes do que as indicadas pelo **expoente.**

2772	2	4
1386	2	6, 12
693	3	9, 18, 36
231	3	21, 63, 126, 14, 28, 84, 252
77	7	77, 231, 693, 1386, 2772, 22, 44, 132, 396
11	11	33, 66, 99, 198, 396, 924, 154. 308, 924.

O numero total dos divisores de um numero obtem-se pela seguinte

Regra. — Augmentam-se de uma unidade os expoentes dos factores primos do numero considerado, e faz-se o producto dos expoentes assim augmentados.

Ex. : $846=2\times3^2\times47=(1+1)\ (2+1)\ (1+1)=12$ divisores.

101) *Exercicios.*

1) Sublinhar os numeros primos dentre os seguintes : 4, 5, 6, 9, 11, 13, 17, 18, 19, 20, 23, 29, 31, 33, 47, 53, 59, 67, 96, 97.

2) Citar tres numeros primos entre si.

3) Fazer a tabella de numeros primos de 1 a 100.

4) Decompor em seus factores primos: 246, 974, 1322, 4854, 8676.

5) Achar os divisores de 36, 78, 88, 154, 762.

6) Indicar o numero de divisores dos numeros 45, 99, 146, 343, 582, 791.

7) Achar um numero que admitta 20 divisores.

8) Determinar o menor de dois numeros que admittam 20 divisores.

9) Achar quatro numeros que tenham oito divisores, e que, sendo divisiveis por 3 e 5, não o sejam por nenhum outro numero primo.

10) Quantos numeros ha, menores do que 1000, e que sejam multiplos communs de 5 e 7 ?

11) Citar um numero de cinco algarismos, que seja divisivel por 2, 3, 5, 7 e 11.

Maximo divisor commum

102 *Divisor* é um numero que divide outro exactamente. 6 é divisor de 36.

Divisor commum é um numero que divide dois ou mais numeros, sem deixar resto. 7 é divisor commum a 28, **49,** 84, etc.

Maximo divisor commum (m. d. c.) é o maior numero que divide dois ou mais numeros exactamente. 2. 3, 4, 6, 12 e 24 são divisores commum a 72 e 48, mas 24 é o m. d. c.

	4	. 4	2	2
186	44	10	4	2
10	4	2	0	

105. *Regra para se achar o m. d. c. a dois numeros*: Divide-se o maior pelo menor; o 1.º divisor pelo 1.º resto, o 2.º divisor pelo 2.º resto, e assim por diante, até se ultimar a divisão. O ultimo divisor é o m. d. c.

103. Para se achar o m. d. c. a tres ou mais numeros, procura-se primeiro entre dois; depois, entre o m. d. c. destes e o terceiro, e assim por diante.

Sendo primos os numeros, o ultimo divisor será a unidade.

104. Outro processo: Decompõem-se os numeros em seus factores communs, affectados do menor expoente. $48 = 2^4 \times 3$. $84 = 2 \times 3 \times 7$. $189 = 3^3 \times 7$. $372 = 2^2 \times 3 \times 31$. M. d. c. $= 2^2 \times 3$.

105 — *Exercicios*

1) Achar o m. d. c. de 40 e 68; de 90 e 118; de 15 e 234; de 528 e 929.

2) Achar o m. d. c. de 30, 48 e 78; de 45. 76 e 94; de 115, 218, 446 e 778.

8) Achar o m. d. c. de 36, 78 e 114, pelo processo dos factores primos.

4) O m. d. c. de dois numeros é 5; os quocientes das divisões que se fizeram para obtel-o, são 3, 7 e 9. Quaes são os dois numeros?

Minimo multiplo commum

106. *Multiplo* de um numero é outro numero que é divisivel por elle exactamente. 35 é multiplo de 7, porque é divisivel por 7, sem deixar resto.

Multiplo commum é um numero que é divisivel por dois ou mais numeros, sem deixar resto. 35 é multiplo commum de 5 e 7; 28, de 2, 4 e 7.

Menor multiplo commum (m. m. c.) é o menor numero que é divisivel por dois ou mais numeros exactamente. 2 e 3 têm por multiplo commum 6, 12, 18, 24, 36. etc., mas 6 é o m. m. c.

8,	12,	15,	19,	23,	38,	2
4,	6,	15,	19,	23,	19,	2
2,	3,	15,	19,	23,	19,	2
1,	3,	15,	19,	23,	19,	3
1,	1,	5,	19,	23,	19,	5
1,	1,	1,	19,	23,	19,	19
1,	1,	1,	1,	23,	1,	23
1,	1,	1,	1,	1,	1,	

107. *Regra para se procurar o m. c. a dois ou mais numeros*: Escrevem-se todos os numeros em linha horizontal, separados por virgula, e sublinham-se. Acha-se o menor divisor de alguns desses numeros, e, escripto esse numero á direita, dividem-se por elle os numeros divisiveis, e escrevem-se os quocientes na linha seguinte, na qual se copiam tambem os não divisiveis; e assim se procede até se obter 1 em todos os quocientes. O producto dos divisores forma o m. m. c. M. m. c. $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 19 \times 23$.

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Outro processo: Decompõe-se o numero em factores primos, e faz-se o seu producto, tomando os factores communs uma vez só e affectados do maior expoente.

$48 = 2^4 \times 3$. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. $1925 = 5^2 \times 7 \times 11$. O m. m. c. a 48, 180 e 1825 é $= 2^4$ (16) $\times 3^2$ (9) $\times 5^2$ (25) $\times 7 \times 11$.

Quando os numeros forem primos entre si, o m. m. c. é o producto delles.

108. — EXERCICIOS:

1) Achar o m. m. c. de 14, 26, 34 e 75; de 118, 447 e 892.

2) Achar o m. m. c. de 98, 136 e 255, pelo processo dos factores primos.

3) Sendo 4 o m. d. c. de dois numeros, e 468 o seu m. m. c., quaes são os dois numeros?

Conversão de inteiros em fracções decimaes de uma denominação dada; fracções improprias. Problemas e questões praticas.

109. *Fracção ordinaria* é uma ou mais partes da unidade, dividida em meios. terços, etc.

A fracção ordinaria é representada por dois numeros, separados por um traço horizontal. O numero de cima chama-se *numerador*; o de baixo, *denominador*.

O denominador indica em quantas partes está dividida a unidade: o numerador, o numero de partes tomadas. Assim, dividindo um queijo em 8 partes e tomando 3, tem-se a fracção $\frac{3}{8}$.

110. *Ler a fracção ordinaria. Regra*: Lê-se o numerador, e depois o denominador, seguido da palavra avos. $\frac{5}{16}$, lê-se: cinco dezeseis avos.

Excepções:

1) os denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9 têm denominações especiaes: meio, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono. $\frac{6}{9}$ lê-se: seis nonos;

2) quando o denominador for multiplo de 10, deve ser lido como numero ordinal: 10, decimo; 100, centesimo; 1000, millesimo, etc.. $\frac{35}{100}$, lê-se: 35 centésimos.

111. A fracção pode ser propria e impropria. *Fr. propria* é a que tem o numerador menor que o denominador, como $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{54}$. *Fr. impropria* é a que tem o numerador egual ao denominador, ou maior do que elle, como $\frac{4}{4}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{36}{7}$. Chamam-se fr. improprias, porque não são fracção: são numeros inteiros ou mixtos.

112. 1.º principio. *Toda fr. representa o quociente de uma divisão, da qual o numerador é o dividendo, e o denominador o divisor.* Com effeito: multiplicando o quociente $\frac{5}{6}$ pelo divisor 6, obtem-se o dividendo 5. $\frac{5}{6} \times 6 = \frac{5 \times 6}{6} = 5.$

113. 2.º principio. *De duas ou mais fr. que têm o mesmo denominador, a maior é a que tem menor denominador.* $\frac{1}{4} > \frac{1}{7}$. De facto: no 1.º caso, 1 queijo, por ex., foi dividido em 4 partes, emquanto que no 2.º o foi em 7; portanto, 1 parte do 1.º é maior do que 1 parte do 2.º. Do mesmo modo, $\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$. O signal $>$ significa *maior do que*.

114. 3.º principio. *De duas ou mais fr. que têm o mesmo denominador, a maior é a que tem maior numerador.*

$\frac{5}{6} > \frac{2}{6}$. Os queijos foram divididos no mesmo numero de partes; portanto, terá mais o que dellas tomar maior numero.

115. 4.º principio. *Sendo o numerador egual ao denominador, a fr. é egual á unidade; e todas as fr. nesse caso são eguaes entre si*: $\frac{4}{4} = 1$. De facto: um queijo por ex., foi dividido em 4 partes: tomando-se todas ellas, toma-se o queijo inteiro.

$\frac{4}{4} = \frac{7}{7}$: Neste caso, 2 queijos eguaes foram divididos um em 4 e outro em 7 partes; ora, tomando-se todas as partes, quer de um, quer de outro, toma-se, em ambos os casos, o queijo inteiro.

116. 5.º principio. *Sommando a ambos os termos de uma fracção, o mesmo numero, a fracção augmenta si for propria e diminui si for impropria.*

$$\frac{2+4}{5+4} = \frac{6}{9} \qquad \frac{5+4}{2+4} = \frac{9}{6}$$

$\frac{2}{5} < \frac{6}{9}$, pois a $\frac{2}{5}$ faltam $\frac{3}{5}$ para completar a unidade, e a $\frac{6}{9}$ faltam $\frac{3}{9}$. Ora: $\frac{3}{5} < \frac{3}{9}$; portanto, á fr. $\frac{2}{5}$ falta mais para completar o inteiro do que á fracção $\frac{6}{9}$, e aquella é, pois, menor que $\frac{6}{9}$.

$\frac{5}{2} > \frac{9}{6}$, pois a 1.ª excede a unidade de $\frac{3}{2}$, ao passo que a 2.ª excede de $\frac{3}{6}$. Sendo $\frac{3}{2}$ maior que $\frac{3}{9}$, a fr. $\frac{5}{2}$ excede mais a unidade do que a fr. $\frac{\ }{6}$, e é, por consequencia, maior que esta.

117. 6.º principio. *Subtrahindo de ambos os termos de uma fracção ordinaria, o mesmo numero, a fracção diminui si for impropria, e augmenta, si for propria.*

Demonstra-se analogamente.

118. *7.º principio. Multiplicando o numerador de uma fracção por um numero inteiro, a fracção augmenta este numero de vezes.*

$$\frac{2\times 3}{7} = \frac{6}{7}.$$

$\frac{6}{7}$ é 3 vezes maior que $\frac{2}{7}$: em ambos os casos a unidade foi dividida no mesmo numero de partes, e si na fracção $\frac{6}{7}$, se tomam 3 vezes mais do que na fracção $\frac{2}{7}$, é claro que aquella é 3 vezes maior que esta.

119. *8.º principio. Multiplicando o denominador de uma fracção por um numero inteiro, a fracção torna-se este numero de vezes menor.*

$$\frac{2}{5\times 3} = \frac{2}{15}$$

$\frac{2}{15}$ é 3 vezes menor que $\frac{2}{5}$: em ambos os casos tomam-se o mesmo numero de partes; as partes da 1.ª fracção ($\frac{2}{15}$) são 3 vezes menores que as da 2.ª ($\frac{2}{5}$), por isso que naquella a unidade foi dividida em 15 partes, e nesta, em 5. Assim, 2 partes da 1.ª, ou $\frac{2}{15}$, são 3 vezes menores que 2 partes da 2.ª, ou $\frac{2}{5}$.

120. *9.º principio: Dividindo o numerador de uma fracção por um numero inteiro, ella diminui; dividindo o denominador, ella augmenta.*

Demonstra-se analogamente.

121. *10.º principio. Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, a fracção não se altera.*

Com effeito, ha compensação.

122. *Complemento de uma fracção* **é o que lhe falta**

para completar o unidade. O complemento de $\frac{3}{5}$ é $\frac{2}{5}$, o de $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$.

Um numero inteiro pode ser considerado sob a forma de fr., tendo para denominador a unidade. Assim, $10 = \frac{10}{1}$; $8 = \frac{8}{1}$.

Um numero inteiro pode ser considerado sob a forma de fr., com qualquer denominação. Para isso, dá-se para numerador da fr. o inteiro multiplicado pelo denominador. $8 = \frac{48}{6} = \frac{56}{7} = \frac{32}{4} = \frac{72}{9} = \frac{64}{8} = \frac{16}{2} = \frac{120}{15}$, etc.

123. PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) Dar a 12 a forma de fr., tendo para denominador a unidade.

2) Dar a 26 a forma de fr., com 12 denominadores differentes.

3) 5 que fracção é de 7?

4) Qual é o quociente de 6 dividido por 9?

5) Quantas metades de laranjas ha: numa laranja? em 2 laranjas? em cinco laranjas? em 20 laranjas?

6) Quantos terços de marmello ha: num marmello? em 2 marmellos? em 5 marmellos? em 20 marmellos?

7) Quantos quartos de pipa ha: numa pipa? em 2 pipas? em 5 pipas? em 20 pipas?

8) Quantos oitavos de tonnel: num tonnel? em 2 tonneis? em 5 tonneis? em 20 tonneis?

9) 16 meias horas, quantas horas representam?

10) 64 quartos de folha, quantas folhas representam?

11) Uma propriedade é dividida em 6 partes. Uma pessôa compra 4 destas partes; que fracção da propriedade adquiriu?

12) Uma pessôa tinha 300$000, agora só tem 100$000. Que fracção de seu haver gastou?

13) Quantos quartos de hora ha em 3 horas?

14) Que é 3 comparado a 12? 4 a 18? 15 a 50? 25 a 100?

15) Que fracção é 1 de 3? 4 de 12? 75 de 100?

16) Quanto falta ás fracções seguintes, para egualar a unidade:

$\frac{2}{6}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{9}{50}$, $\frac{314}{620}$?

17) De quanto as fracções seguintes excedem a unidade :

$\frac{5}{1}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{37}{14}$, $\frac{146}{121}$, $\frac{858}{476}$?

18) Converter os numeros inteiros seguintes : a) em terços ; b) em quintos ; c) em meios ; d) em vigesimos : e) em quinquagesimos-oitavos :

3 — 5 — 14 — 35 — 88.

19) Idem, idem, com relação aos numeros :

2,4 — 5,45 — 0,084 — 3,5004 — 95,2

20) Transformar os numeros inteiros seguintes em fracções improprias: 5 unidades em oitavos ; 14 unidades em quartos; 6 unidades avos ; 36 unidades em 28 avos ; 33 unidades em 46 mos ; 8 unidades em decimos ; 44 unidades em centesi- 0,0006 ; 4,002 em millesimos ; 4,2 em 8,5 ; 0,24 em......... 2,000006.

21) Qual das fracções seguintes é a maior :

$\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{5}$? $\frac{3}{8}$ ou $\frac{3}{10}$? $\frac{4}{7}$ ou $\frac{2}{7}$? $\frac{15}{21}$ ou $\frac{15}{18}$?

22) Citar algumas fracções eguaes á unidade.

23) Citar algumas fracções maiores que 3 vezes a unidade. Idem, maiores que 12 vezes.

14) Reduzir os numeros mixtos seguintes a fr. improprias : 18 $\frac{1}{3}$, 4 $\frac{3}{15}$, 13 $\frac{4}{9}$, 245 $\frac{1}{1}$, 368 $\frac{3}{8}$.

25) Qual é a fracção que é 12 vezes menor do que 9 ?

26) Qual é a maior fracção propria, tendo 15 por numerador ?

27) Qual é a maior fracção propria, tendo 15 por denominador ?

28) Escrever as fracções proprias menores do que $\frac{7}{15}$, e do mesmo denominador.

29) Escrever as fracções proprias maiores que $\frac{7}{15}$, e do mesmo denominador.

30) Escrever 6 fracções proprias menores do que $\frac{7}{15}$, e do mesmo numerador.

31) Escrever as fracções proprias maiores que $\frac{7}{15}$, e do mesmo numerador.

32) Que fracção se deve accrescentar á unidade, para se ter $\frac{14}{5}$?

33) Que fracção se deve tirar da unidade, para se ter $\frac{4}{9}$?

34) Que fracção da hora representam 24 minutos ?

35) Escrever em algarismos: tres sétimos; cinco nonos; sete quinze avos; quinze vinte e sete avos.

36) Qual é a fracção 6 vezes menor que a unidade ?

37) Qual é fracção 6 vezes maior que a unidade ?

Conversão de fracções ordinarias em decimaes, e vice-versa. Problemas e questões práticas

124. *Regra* : Divide-se o numerador pelo denominador, para o que se accrescenta um zero ao numerador, e a cada um dos restos, emquanto se continuar a divisão. No quociente escrevem-se zero e virgula, e, em seguida, os algarismos das divisões parciaes.

A fr. sendo impropria, o logar do zero será occupado pela parte inteira.

$\frac{3}{4}$ $\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$

Não se podendo dividir 3 por 4, convertem-se 3 inteiros em 30 decimos, que, divididos por 4, dão o algarismo dos decimos do quociente. O resto—2 decimos—é convertido em 20 cent., cuja divisão por 4 dá o algarismo dos cent. do quociente.

$\frac{7}{3}$ $\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 3,5 \\ 0 & \end{array}$

$\frac{3}{44}$ 300 | 44   036 | 0,06

Nesta conversão obtêm-se muitas vezes fr. decimaes de numero infinito de algarismos, ou fr. decimaes periódicas.

Pode-se tambem accrescentar ao numerador tantos zeros quantos algarismos decimaes se desejam. No quociente separam-se, depois, tantos algarismos quantos os zeros accrescentados.

Converte-se uma fracção decimal em ordinaria, dando para numerador a fracção decimal sem a virgula; e, para denominador, 1 e tantos zeros quantos forem os algarismos decimaes. $40,806 = \frac{40806}{1000}$; $0,014 = \frac{14}{1000}$.

Dizimas periódicas

125. *Dizimas periódicas* são fracções decimaes periódicas, isto é, aquellas fracções decimaes de numero infinito de algarismos.

126. As *fr. decimaes periódicas* são simples ou compostas. *Simples*, quando os periodos apparecem logo depois da virgula: 0,242424... 0,3458934589... *Compostas*, quando entre a virgula e o 1.º periodo ha um ou mais algarismos não periódicos: 0,3444... 0,283636... 0,328752875...

127 — Dada um fr. ordinaria, é possivel dizer si, convertida em decimal, ella dará fr. dec. de numero limitado de algarismos, dizima periódica simples, ou composta.

Principios:

1) *A fracção ordinaria cujo denominador só contiver os factores 2 ou 5, dará fracção decimal de numero limitado de algarismos.* Assim, $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{32}, \frac{15}{128}$.

2) *A fr. ordin. cujo denominador não contiver nem o factor 2, nem o factor 5, dará dizima periódica simples.* Assim, $\frac{2}{7}, \frac{3}{9}, \frac{5}{11}, \frac{12}{23}$.

3) *A fr. ord. cujo denominador contiver factores*

differentes de 2 e 5, e junctamente um desses factores, dará dizima composta. Assim, $\frac{7}{15}, \frac{5}{28}, \frac{18}{35}, \frac{224}{275}$.

A fr. considerada deve ser simplificada, quando os seus termos não formarem uma fracção irreductivel.

128. *Fracção geratriz.* Acha-se a fracção geratriz de uma dizima periódica simples, dando, para numerador, um periodo, e para denominador tantos noves quantos forem os algarismos do periodo:

$$0,4564564... \qquad x = \frac{456}{992}$$

129. Acha-se a fracção geratriz de uma dizima periódica composta, dando, para numerador, a parte não periódica, e, para denominador, tantos noves quantos forem os algarismos de um periodo, e tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periódica:

$$0,49898... \qquad x = \frac{498 - 4}{990}$$

O numerador póde tambem ser formado pela parte não periódica multiplicada por tantos noves quantos forem os algarismos de um periodo, mais um dos periodos:

$$0,49898... \qquad x = \frac{4 \times 99 + 98}{990}$$

130. *Demonstração das regras:*

a) da dizima simples:

Seja a fracção periódica 0,795795... Provar que $x = \frac{795}{999}$.

Representando por x a fracção geratriz da dizima, tem-se:

$$x = 0,795795... \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros desta egualdade por 1000, vem:

$$1000\,x = 795,795... \quad (2)$$

Subtrahindo a egualdade n. 1 da n. 2:

$$1000\,x = 795,795...$$
$$x = 0,795...$$

$$\mathbf{999\,x = 795 \quad (3)}$$

Dividindo ambos os membros da egualdade n. 3 por 999:

$$\frac{999\,x}{999} = \frac{795}{999}$$

$$x = \frac{795}{999}.$$

b) da dizima composta.

Seja a dizima composta: 0,35959...

These: $x = \frac{459 - 4}{990}.$

Representando por x a fracção geratriz da dizima; multiplicando a egualdade n. 1 por 1000, e depois por 10; subtrahindo a egualdade n. 3 da n. 2, e dividindo ambos os membros da n. 4 por 990, tem-se:

$$x = 0{,}45959... \quad (1)$$
$$1000\,x = 459{,}59..... \quad (2)$$
$$10\,x = 4{,}59..... \quad (3)$$

$$990\,x = 459 - 4$$

$$\frac{990\,x}{990} = \frac{459 - 4}{990}$$

$$x = \frac{459 - 4}{990}.$$

Pelo 2.º processo, temos a these: $x = \frac{4 \times 99 + 59.}{990}$

Multiplicando ambos os membros da egualdade: $x =$ 0,45959... por 10, e achando a geratriz da parte á direita da virgula, como na dizima simples, tem-se:

$10\,x = 4{,}59...$

$$10\,x = 4\,\frac{59}{99} = \frac{4 \times 99 + 59}{99},$$ e dividindo por 10 ambos os membros desta egualdade, para o que se multiplica o denominador por 10, tem-se:

$$\frac{4 \times 99 + 59}{990}$$

131. PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) Reduzir a fracções decimaes: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{6}{14}, \frac{7}{238}, \frac{154}{369}.$

2) Reduzir a uma só fracção decimal:

$\frac{2}{3} + 0{,}3$; $\frac{7}{9} + 10{,}4$; $\frac{15}{27} + 2{,}0046$; $\frac{154}{876} + (4{,}5 - 3{,}000)$;

$$\frac{\frac{4}{5} - 0{,}2 \times (\frac{4}{3} - 0{,}468)}{\frac{6}{8} - 0{,}005}.$$

2) Reduzir a decimaes exactos, ou de tres algarismos, as seguintes fracções:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{15}{27}, \frac{43}{146}, \frac{89}{274}.$$

4) Escrever tres fracções ordinarias que dêm fracções decimaes finitas.

5) Escrever tres fracções ordinarias que dêm fracções decimaes periódicas simples.

6) Escrever tres fracções ordinarias que dêm fracções decimaes periódicas compostas.

7) Escrever tres fracções ordinarias que dêm fracções decimaes de tres algarismos.

8) Converter 0,75 em frecção ordinaria.

9) Achar a geratriz das seguintes fracções periódicas; 0,333...; 0,435435; 0,4888...; 0,36444...; 0,38459459...;.... .... 0,435673567....

10) Converter $\frac{3}{8}$ em fr. decimal.

11) Simplificar as expressões, e dizer si ellas dão dizima:

$2 - \frac{3}{4} + 0{,}4 - 0{,}18$; $\frac{4}{8} - 0{,}046 + 2{,}409 \times \frac{3}{4}$;

$2 + \frac{3}{7} - 0,6 \times 0,04$; $\frac{6}{7} - 0,025 \times 3,5 \frac{1}{3}$.

Reducção de duas ou mais fracções ao mesmo denominador. Caso geral, e especialmente, casos particulares. Problemas e questões práticas

132. *Para se reduzirem duas ou mais fr. ao mesmo denominador*, ha duas regras:

1.ª) Multiplicam-se os dois termos de cada fr. pelo producto dos denominadores das outras. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}$, e $\frac{5}{9}$, reduzidas ao mesmo denominador, são eguaes a

$$\frac{2\times4\times7\times9}{3\times4\times7\times9}, \frac{3\times3\times7\times9}{4\times3\times7\times9}, \frac{4\times3\times4\times9}{7\times3\times4\times9}, \frac{5\times3\times4\times7}{9\times3\times4\times7} = \frac{504}{756}, \frac{567}{766}, \frac{432}{756}, \frac{420}{756}.$$

Póde-se tomar para denominador commum (neste caso, o producto dos denominadores das outras) qualquer multiplo commum dos denominadores, convindo que as fr. tenham o menor denominador commum.

2.ª) Procura-se o m. m. c. dos denominadores; este será o denominador commum. Divide-se este denominador commum pelos denominadores das fr., e multiplicam-se os quocientes pelos numeradores respectivos. As fr. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}$, e $\frac{5}{9}$ dão, reduzidas ao mesmo denominador $\frac{168}{252}, \frac{189}{252}, \frac{144}{252}, \frac{140}{252}$.

133. A reducção de fr. ao mesmo denominador é necessaria para effectuar a somma e subtracção de fr., como tambem para comparal-as.

E' bem de ver que esta reducção é baseada no principio do n. 121.

134. PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) Reduzir á minima denominação as fr. $\frac{4}{6}, \frac{7}{8}, \frac{6}{19}$ e $\frac{7}{18}$.

2) Reduzir ao mesmo denominador as fr. $\frac{2}{8}, \frac{4}{9}, \frac{6}{17}$ e $\frac{12}{25}$,

3) Reduzir ao mesmo denominador as fr. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, e $\frac{8}{9}$

5. Collocar, por ordem de grandeza, as fracções:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{13}{15}.$$

5. Reduzir ao menor denominador, pelo processo do m. m. c., as seguintes fracções:

$$\frac{7}{8}, \frac{15}{21}, \frac{21}{36}, \frac{35}{78}, \frac{146}{365}.$$

6) Reduzir ao mesmo denominador, pelo processo das multiplicações, as fracções seguintes:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}.$$

Simplificação de fracções pelos divisores communs e pelo maximo divisor commum. Problemas e questões práticas

135. *Fracções equivalentes.* Do principio referido no n. 121, resulta que um numero infinito de fracções podem ter o mesmo valor. Assim, multiplicando os dois termos da fracção $\frac{4}{5}$ successivamente por 2, 3, 4, 5, 7, 9... obtêm-se as fracções $\frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{20}{25}, \frac{28}{35}, \frac{36}{45}$..., todas eguaes entre si.

136. *Simplificar fracções* é exprimil-as em termos menores, mas com o mesmo valor.

137. A simplificação das fracções é baseada no principio do n. 121.

Com effeito, simplifica-se uma fracção *dividindo-lhe ambos os termos por seu m. d. c.*

$$\frac{94 : 47}{141 : 47} = \frac{2}{3}$$

138. Outra regra para a simplificação de fracções é dividir ambos os termos successivamente pelos numeros divisiveis, que são dados pelos caracteres de divisibilidade.

$$\frac{636 : 3}{945 : 3} = \frac{210 : 3}{315 : 3} = \frac{70 : 5}{105 : 5} = \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{2}{3}$$

139. Quando se tratar de fracções improprias, pode-se começar por extrahir-lhes os inteiros; simplifica-se, depois, a fracção resultante, si houver e si for possivel.

$$\frac{90}{16} = 5\,\frac{10 : 2}{16 : 2} = 5\,\frac{5}{8}$$

140. Quando se tratar de expressões como $\frac{8 \times 6 \times 15}{12 \times 4 \times 5}$, a simplificação se faz como nos numeros anteriores. Dividindo-a por 6, 5 e 4, obtem-se : $\frac{2 \times 1 \times 3}{2 \times 1 \times 1} = \frac{6}{2} = 3.$

141. PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) Simplificar as fracções : $\frac{4}{6}, \frac{8}{18}, \frac{133}{207}, \frac{649}{816}.$

2) » » expressões :

$$\frac{2\frac{3}{4} + 0,6}{3 - (1,04 \times 0,5)} ; \quad \frac{(\frac{3}{4} + \frac{6}{4}) - 0,025}{(\frac{6}{8} - \frac{2}{8}) + (\frac{3}{6} + \frac{5}{6})}.$$

3) Reduzir á expressão mais simples, as fracções : $\frac{68}{104}, \frac{86}{144}, \frac{376}{798}, \frac{1452}{3694}, \frac{5896}{8974}.$

4) Simplificar 3 fracções : $6\,\frac{18}{60}, \frac{114}{12}, \frac{226}{154}.$

5) Simplificar as fracções :

$$\frac{12 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 2} ; \quad \frac{9 \times 7 \times 18}{14 \times 3 \times 5} ; \quad \frac{6 \times 14 \times 17 \times 48}{7 \times 10 \times 15}.$$

6) Simplificar a expressão :

$$\frac{(4,5 \times 3,05) + \frac{146}{3} - 18,506)}{\frac{4956}{6} - (2,05 \times \frac{24}{5})}$$

142. ADDIÇÃO DE FRACÇÕES

1.º caso — As fracções têm o mesmo denominador.
2.º caso — » » denominadores differentes.
3.º caso — » » são mixtas.

1.º caso

Um negociante dividiu um queijo em 9 fatias, das quaes vendeu successivamente 2, 3 e 3. Quanto vendeu do queijo?

E' evidente que a somma de 2 nonos, 3 nonos e 3 nonos é egual a 8 nonos, ou $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}.$

Regra — Sommam-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.

2.º caso

Um militar bebeu um dia de passeio, com mais 5 camaradas, 3 garrafas de vinho; com outros 6, 4 garrafas de vinho. Quanto bebeu elle?

Temos as fracções $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{7}$, que reduzidas ao mesmo denominador e sommadas, dão : $\frac{21}{42} + \frac{24}{42} = \frac{45}{42} = 1\,\frac{3}{42}.$

Regra — Reduzem-se ao mesmo denominador, e sommam-se.

3.º caso

Venderam-se, de uma peça de fazenda, $4^m \frac{3}{8}$, $5^m \frac{1}{3}$ e $6^m \frac{7}{9}$.

Regra — Reduzem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e procede-se como no 2.º caso.

$$4\frac{3}{8} + 5\frac{1}{3} + 6\frac{7}{9} = \frac{35}{8} + \frac{16}{3} + \frac{61}{9} = \frac{315 + 384 + 488}{72} = \frac{1187}{72} = 16\frac{35}{72}.$$

143. SUBTRACÇÃO DE FRACÇÕES

1.º caso — *As fracções têm o mesmo denominador.*
2.º caso — » » » *denominadores differentes.*
3.º caso — » » *são mixtas.*

1.º caso

Dividiu-se um queijo em 8 partes e venderam-se 3. Quanto resta do queijo?

E' evidente que, de 8 oitavos tirando-se 3 oitavos, restam 5 oitavos, isto é: $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Regra — Subtrahem-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.

2.º caso

Regra — Reduzem-se ao mesmo denominador, e procede-se como no 1.º caso.

Uma pessôa tem direito a $\frac{4}{5}$ de uma somma e dão-lhe apenas $\frac{4}{7}$. Quanto se lhe resta?

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{28 - 20}{35} = \frac{8}{35}.$$

3.º caso

Regra — Reduzem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e procede-se como no 2.º caso.

Venderam-se $5^m \frac{4}{5}$ de uma peça de fazenda, medindo $20^m \frac{3}{4}$. Quanto resta?

$$20\frac{3}{4} - 5\frac{4}{5} = \frac{83}{4} - \frac{29}{5} = \frac{415-116}{20} = \frac{299}{20} = 14\frac{19}{20}.$$

140 PROBLEMAS E QUESTÕES PRATICAS

1) Sommar as fracções $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{12}$; $3\frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1\frac{1}{8}$.

2) Subtrahir as fracções $\frac{7}{8}$ e $\frac{4}{7}$; $2\frac{2}{5}$ e $1\frac{1}{8}$; $3\frac{5}{6}$ e $\frac{9}{10}$.

3) Simplificar as expressões seguintes:

$$\frac{(\frac{2}{3} - 0{,}5) - (\frac{4}{5} - \frac{2}{9})}{(3\frac{4}{8} + \frac{7}{9})(6{,}4 \times 0{,}8)} \; ; \; \frac{(\frac{4}{5} \times \frac{3}{10}) - (1\frac{8}{9} - \frac{11}{15})}{(4{,}5 - 3{,}009) \times (\frac{2}{5} - 0{,}05)}$$

4) Uma caixa recebe agua por 3 torneiras; a 1.ª fornece 5 metros cubicos em 2 horas, a 2.ª — 7 em 3 horas, e a 3.ª — 9 em 5 horas. Abrindo-se as tres torneiras, quantos metros cubicos de agua fornecerão ellas numa hora?

5) Qual a fracção que, com $\frac{2}{9}$, fica egual a $\frac{7}{8}$?

6) Uma operaria faz 5 vestidinhos em 7 dias, e outra faz 8 vestidinhos em 12. Qual a mais habil?

7) Uma torneira enche uma caixa em 5 horas, outra enche-a em 8 horas; na base, uma torneira esvasia a caixa em 7 horas. Que fracção da caixa se encherá numa hora, **abrindo-se as tres torneiras?**

8) Compraram-se tres metros de casimira; $1^m \frac{1}{4}$ para foi gasto fazer a calça e $\frac{4}{5}$ do metro para o collete. Quanto resta para o paletot?

9) De um queijo tomaram-se successivamente $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{4}{15}$. Quanto resta?

10) Uma camponeza comprou dois córtes de fazenda da mesma qualidade: um de $4^m \frac{4}{5}$ e outro de $3^m \frac{3}{4}$. Sobrando-lhe $1^m \frac{4}{7}$, quanto gastou da fazenda?

11) Um operario trabalhou 10 dias $\frac{1}{4}$, por 46$500; 8 dias $\frac{3}{4}$ por 50$000; 19 dias $\frac{2}{5}$, por 72$500. Quantos dias trabalhou? quanto recebeu?

12) Tiraram-se 180 litros $\frac{3}{4}$ a um tonnel de vinho; depois, 48 litros $\frac{4}{5}$; terceira vez, 140 litros $\frac{2}{9}$. Restando ainda no tonnel 240 litros $\frac{3}{5}$, qual a sua capacidade?

13) Uma arvore tem 18 metros $\frac{4}{5}$ de altura, e outra, 27 metros $\frac{3}{4}$. Quanto a 2.ª é mais alta que a 1.ª?

14) Adiantando-se um relogio de 2 horas $\frac{1}{2}$, elle marca 11 $\frac{1}{2}$. Que horas são?

15) Tres pessôas receberam, respectivamente, de uma herança, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{15}$. Tendo ficado o restante para o testamenteiro, quanto recebeu este?

16) Um negociante recebeu 5 peças de fazendas, me-

dindo respectivamente: 42 $\frac{3}{5}$ metros, 38 $\frac{4^m}{9}$, 18 $\frac{5^m}{6}$, 14 $\frac{2^m}{3}$ e 10 $\frac{1^m}{2}$, e vendeu da 1.ª 18 $\frac{4^m}{6}$; da 2.ª, 34 $\frac{5^m}{8}$; da 3.ª, 15^m, da 4.ª, 8 $\frac{1}{2}$; da 5.ª, toda a peça. Quanta fazenda ficou sem vender?

145. MULTIPLICAÇÃO DE FRACÇÕES

1.º caso — Multiplicar uma fracção por um numero inteiro.

Regra: Multiplica-se o numerador pelo inteiro e dá-se o mesmo denominador. $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$

Outra regra: Divide-se o denominador pelo inteiro. $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4:2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

2.º caso — Multiplicar um inteiro por uma fracção:

Regra: Multiplica-se o inteiro pelo numerador, e dá-se o mesmo denominador. $3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

3. — Multiplicar uma fracção por outra.

Regra: Multiplicam-se os numeradores, e da mesma forma os denominadores $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$.

4.º caso — Multiplicar numeros mixtos.

Regra: Reduzem-se a fracção impropria, e procede-se como no 3.º caso. $2\frac{4}{5} \times 1\frac{1}{8} = \frac{14}{5} \times \frac{9}{8} = \frac{126}{40} = 3\frac{6}{40} = 3\frac{3}{20}$.

146. DIVISÃO DE FRACÇÕES

1.º caso — Dividir uma fracção por um inteiro.

Regra: Multiplica-se o denominador pelo inteiro e conserva-se o mesmo numerador. $\frac{6}{15} : 2 = \frac{6}{15 \times 2} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Outra regra: Divide-se o numerador pelo inteiro e dá-se o mesmo denominador. $\frac{6}{15} : 2 = \frac{6:2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

2º. *Caso*: — *Dividir um inteiro por uma fracção.*

Regra: Multiplica-se o dividendo pela fracção divisora invertida. $5 : \frac{3}{8} = 5 \times \frac{8}{3} = \frac{40}{3}$.

3º. *Caso*: — *Dividir uma fracção por outra.*

Regra: Multiplica-se a fracção dividendo pela fracção divisora invertida. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

4º. *Caso*: — *Dividir numeros mixtos.*

Regra: Reduzem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e procede-se como no 3º. caso.

$$2\frac{3}{4} : \frac{52}{3} = \frac{11}{4} : \frac{17}{3} = \frac{33}{68}$$

147) PROBLEMAS E QUESTÕES PRÁTICAS

1) $\frac{2}{7} \times 5$; $\frac{3}{8} \times 100$; $\frac{3}{16} \times 2$; $\frac{3}{4} \times \frac{7}{9}$; $3\frac{3}{7} \times 4\frac{5}{6}$.

2) $\frac{4}{15} : 2$; $8 : \frac{3}{7}$; $\frac{4}{9} \div \frac{3}{5}$; $2\frac{1}{2} : 5\frac{7}{9}$.

3) $\dfrac{(\frac{4}{5} \times 6) - (8,4 - \frac{4}{15})}{(\frac{4}{7} - \frac{3}{21})(\frac{2}{3} + 8)}$; $\dfrac{(\frac{14}{3} - 3) + (\frac{7}{8} \times 0,2)}{(\frac{4}{0,5}\,3,1) - (7 + 1\frac{1}{5})}$

4) Custando 1 metro de fazenda 1$200, quanto custam $2\frac{3}{4}$ metros?

5) Qual é a metade do triplo de 8:$600?

6) Quanto valem $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de 150$000?

7) Um operario faz, por dia, $2\frac{1}{2}$ metros de uma obra. Quanto da obra fará elle em $15\frac{3}{4}$ dias?

8) Um operario gasta $\frac{3}{5}$ de seu ordenado, e ainda lhe restam 140$000. Qual o seu ordenado?

9) Quantos são $\frac{4}{3}$ de 178?

10) Um operario trabalhou $28\frac{3}{4}$ dias, a 3$800 por dia, e pagou, com o que recebeu, as despezas do mez e $\frac{3}{5}$ de uma divida de 100$000. Quanto dispendeu com as despezas do mez?

11) Um operario trabalhou 1 dia e 3 horas, 1 dia e 2 horas e $\frac{3}{4}$ do dia. Sendo o dia de serviço egual a 8 horas, quanto deve receber o empregado, sabendo-se que elle ganha 5$500 por dia?

12) Um alfaiate gasta $\frac{3}{4}$ de metro de fazenda para fazer um collete. Quantos colletes poderá fazer com 20 metros de fazenda?

13) Um operario recebeu 1:800$000, correspondentes, a $3\frac{3}{5}$ de seu ordenado annual. Qual é este?

14) Quer-se dividir, em 6 partes eguaes, uma tabca de $6\frac{3}{4}$ metros. Qual o comprimento de cada parte?

15) Um alfaiate faz $\frac{3}{4}$ de um paletot, num dia. Em quanto tempo fará elle uma duzia?

16) Um commerciante comprou uma peça de fazenda, medindo $35\frac{2}{5}$ metros, a 1$500 o metro. Elle vende $\frac{3}{5}$ da

peça a 2$400, e quer ganhar 65$000 na peça. A como deve vender o restante?

17) Uma peça de fazenda media 20 $\frac{2}{9}$ metros; tiraram-se-lhe, porém, dois córtes: um, de 7 $\frac{3}{4}$ metros, e outro de $\frac{3}{8}$ metros. Quanto vale o restante a 3$800 o metro?

18) Um tonnel contem 440 litros. Quanto se lhe deve tirar, para que não contenha senão o quinto do seu conteudo?

19) Qual é a somma cujos $\frac{5}{8}$ são eguaes a 48?

20) Um pastor perdeu a quarta parte de seu rebanho, e ainda lhe restam 22 carneiros. Quantos carneiros tinha o rebanho?

21) Restam 146$000 a uma pessôa que dispoz de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{11}$, e $\frac{3}{28}$ do seu ordenado. Qual é este?

22) Um pai e seu filho trabalham em certa obra, que deverão fazer junctos em 12 dias. Elles trabalham, junctos, 5 dias: depois, adoecendo o pai, o filho termina a obra em mais 14 dias. Quanto de tempo empregaria cada um, para fazer sosinho a obra?

23) Uma torneira fornece 1050 litros de agua em 7 horas; uma segunda fornece 480 litros em 15 horas; uma terceira, 860 litros em 8 horas. Em quantas horas as tres torneiras encherão uma caixa que comporta 8888 litros?

24) Um viajante anda 10 $\frac{3}{4}$ kilometros em 2 horas. Quantos kilometros percorrerá elle em 5 $\frac{1}{3}$ horas?

25) Uma pessôa gastou $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de metade de seu ordenado, e ainda lhe restam 80$000. Quanto gastou?

26) Quanto fazem 3 $\frac{4}{5}$ de uma fazenda, cujos $\frac{3}{8}$ valem 1$200?

27) Um barril de vinho continha 116 $\frac{3}{4}$ litros; venderam-se $\frac{3}{5}$ a 1 $\frac{1}{4}$ francos, $\frac{4}{5}$ a $\frac{1}{2}$ fr., e o restante a $\frac{7}{8}$ do franco. Tendo ganho $\frac{2}{5}$ do valor, qual é este?

28) $\frac{2}{3}$ de um numero e $\frac{2}{5}$ de outro valem 20. Quaes são os dois numeros?

29) Um numero, dividido por $\frac{3}{4}$, diminui em 20 unidades. Qual é elle?

30) Um numero, divido por $\frac{3}{4}$, augmenta em 20 unidades. Qual é elle?

31) Reunindo a $\frac{1}{5}$ do valor de um automovel, $\frac{2}{9}$ do mesmo valor e mais 800$000, tem-se o custo do automovel. Qual é este?

32) Tres homens fariam uma obra respectivamente em 5, 8 e 10 dias. Em quantos dias a farão, trabalhando junctos?

33) 20 metros de uma fazenda de $\frac{3}{5}$ de largura, custaram 48$000. Quanto custarão 30 $\frac{3}{4}$ metros, de largura?

34) Em uma vitrine ha tres objectos: A, B e C. Os objectos A e B, junctos, valem 35$000; o objecto C vale 10$000, que representam $\frac{1}{5}$ de A e $\frac{3}{5}$ de B. Quanto vale cada um dos objectos A e B?

Systema metrico decimal: seus multiplos e submultiplos. Problemas e questões práticas.

148. Syst. metrico decimal é o syst. de pesos e medidas que têm por base o metro.

149. Elle tem a vantagem de ser baseado numa unidade fundamental, de ter todas as divisões de 10 em 10 e de ser adoptado em quasi todas as nações civilizadas. O antigo syst. era complicado, com subdivisões numerosas e sem ordem; sem uniformidade, porque as medidas variavam de logar para logar; sem estabilidade, porque ellas variavam segundo as circumstancias, o tempo, etc.

150. As unidades fundamentaes do syst. metrico, adoptadas no Brazil, são: *o metro*, unidade de comprimento; *o litro*, unidade de capacidade; *o grammo*, unidade de peso; *o are*, unidade de superficie.

151. Os multiplos das differentes unidades são formados com as palavras *myria* (10000). *kilo* (1000), *hecto* (100), *deca* (10). Os submúltiplos, com as palavras: *deci* (0,1), *centi* (0,01), *milli* (0,001). Assim, os multiplos do grammo são, por ex., *myriagrammo*, *kilogrammo*, *hectogrammo*, e *decagrammo*: os submultiplos, *decigrammo*, *centigrammo*, *milligrammo*.

152. *Escriptura das unidades metricas, seus mult. e submultiplos*:

1) As unidades fundamentaes são representadas pela inicial minuscula, á direita e um pouco acima do numero: 5^l (5 litros), 3^g (3 grammos), 6^a (6 ares).

2) Os multiplos são representados por 2 letras: uma maiuscula, inicial do multiplo; outra minuscula, inicial da medida: 55 Km (55 kilometros), 7 Hg (7 hectogrammos), 32 Dl (32 decalitros).

3) Os submultiplos são representados por duas letras minusculas: uma, inicial do subm.; outra, inicial da medida: 3dg (3 decigrammos), 5cl (5 centilitros) 6mm (6 millimetros). Os subm. são, porém, escriptos geralmente de outra forma: a quantidade de medidas é separada da fr. (os subm.) por uma virgula; os subm. são escriptos: os *deci* na 1.a casa, os *centi*, na 2.a, os *milli*, na 3.a 0, 3 (3 dg), 0^l, 05 (5cl); 0^m,006 (6mm); 6^g 075 (6^g,075mg); 7^l, 45 (7^l45cl). As duas letras dos multiplos e submultiplos podem ser escriptas como expoente.

153. — Toda a medida tem seu duplo e sua metade, escepto as maiores e as menores: Kg (2 Kg, 1 Kg, $\frac{1}{2}$ Kg), Hg (Hg, 1 Hg, $\frac{1}{2}$ Hg), Dg (2 Dg, 1 Dg, $\frac{1}{2}$ Dg), g (2^g, 1^g, $\frac{1}{2}{}^g$), dg (2 dg, 1 dg, $\frac{1}{2}$ dg) cg (2 cg, 1 cg, $\frac{1}{2}$ cg), mg (2 mg, 1 mg, $\frac{1}{2}$ mg).

154. UNIDADE DE COMPRIMENTO.

O metro, unidade de comprimento, é a decima-millionesima parte da distancia do equador ao polo ($\frac{1}{4}$ do meridiano terrestre). Delambre e Méchain mediram o arco de meridiano comprehendido entre Dunkerque e Barcelona, e por seus trabalhos concluiram que $\frac{1}{4}$ do meridiano méde 5.130.740 toesas; ;dividiram esse espaço em 10 milhões de partes eguaes, e uma dessas partes é o comprimento do metro.

Nos grandes comprimentos a unidade empregada é o Km; nos pequenos, o dm, o cm, o mm.

As medidas de comprimento empregadas vão desde o decimetro ao duplo decametro.

O kilometro é tambem considerado medida itineraria, tendo por multiplo o myriametro e por sub-multiplo — o hectometro.

155. UNIDADES DE SUPERFICIE.

Uma unidade de superficie é o metro quadrado, que é um quadrado construido sobre o metro.

Seus mult. e subm. são os mesmos do metro, mais a palavra quadrado; sua representação é a mesma do metro, mais um 2 á direita das abreviaturas e um pouco acima, nos multiplos e subm. 2^{m2}, 3 Km², 5 dm².

Nas medidas de superficie as unidades se succedem de 100 em 100: o m² tem 100 dm²; o dm² tem 100 cm², etc. Portanto sua representação é de dois em dois, correspondendo as duas primeiras casas aos dm², as duas seguintes aos cm², e assim por diante. 8^{m2}, 0564 (8^{m2}, 5 dm² e 64 cm²); 0^{m2}, 006004 (60 cm² e 4 mm²)

Outra unidade de superficie é o are, que vale 100^{m2} ou 1 Dm². Seu unico multiplo é o hectare (Ha), egual a 100^a ou 1 Hm². Seu unico subm. é o centiare, que vale 1^{m2}.

As medidas de superficie podem ser classificadas em tres grupos: 1.º) medidas de superficie propriamente ditas (metro quadrado, mult. e subm.); 2.º) medidas agrarias (are, mult. e subm.); 3.º) medidas topographicas (o Km^2, tendo por multiplo o Mm^2.). As 1.as servem para superficies pequenas; as 2.as, para superficies médias, como a de um campo; as 3.as, para grandes superficies.

156. UNIDADES DE VOLUME.

Uma unidade volume é o metro cubico, que é um cubo de 1^m de lado. Dos multiplos só tem o Mm^3, mas tem todos os subm. Sua representação é a mesma do metro, mais um 3 a direita das abreviaturas, e um pouco acima, nos mult. e subm. 2^{m3}, 54 Mm^3, 6 dm^3, 4 mm^3.

Nestas medidas as unidades se succedem de 1000 em 1000: o m^3 tem 1000 dm^3; o dm^3 tem 1000 cm^3, etc. Portanto, sua representação é de 3 em 3, correspondendo as 3 primeiras casas aos dm^3, as 3 seguintes aos cm^3, e assim por diante: 8^{m3}, 050089 (8^{m3} 50 dm^3 89 cm^3).

Outra unidade de volume é o estério, que tem 1^{m3} e serve para medir lenha. Seu multiplo é o decastério; sub-multiplo — o decistério. Não foram adoptados no Brazil.

O litro é a unidade de capacidade para liquidos e seccos. Suas medidas empregadas vão desde o cl ao Hl. O litro deve ter a forma cylindrica, porque é a geralmente adoptada, pela facilidade do manejo e de limpeza. Quanto á materia, ella varia segundo o uso.

157. UNIDADES DE PESO.

O grammo, unidade de peso, é o peso de 1 cm^3 de agua distillada, a 4° centigrados. 1^l de agua pesa, portanto, 1 Kg (o litro póde conter 1000 cm^3 de agua); 1^{m3} de agua pesa 1000 Kg (elle contém 1000^l).

As medidas de peso usadas vão desde 0^g,001 a 50 Kg.

Outras medidas:

Para os grandes pesos: o *quintal metrico*, que tem 100 Kg, e a *tonelada metrica*, que tem 1000 Kg.

Para os pequenos pesos: além dos já indicados, o *quilate*, que pesa 0^g, 2959, e que é usado para pesar pedras preciosas.

Ha pesos de ferro fundido desde $\frac{1}{2}$ Kg; de cobre, de 1^g a 20 Kg; de laminas de cobre, de $\frac{1}{2}$ ^{g} ou menos.

158. OUTRAS UNIDADES.

A unidade monetaria (o franco) não foi adoptada no Brazil; as unidades de tempo e angular, não o foram na propria França.

Unidades numericas: *milheiro* = 10 centos; *cento* = 100 cousas; *grosa* = 12 duzias; *duzia* = 12 cousas.

Unidades para papel: *resma de papel de impressão*, 20 mãos; *mão*, 25 folhas; *resma de papel almasso*, 17 mãos; *mão*, 5 cadernos; *caderno*, 5 folhas.

159. PROBLEMAS E QUESTÕES PRATICAS.

1) 6 Km quantos Hm ou Dm têm? 1 Km=10 Hm=100 Dm. 6 Km=60 Hm=600 Dm.

2) 6 Kg 8 Hg 6 Dg quantos grammos fazem? 6 Kg=6×10000=6000; 8 Hg=8×100=800; 6 Dg=6×10=60. 6000+800+60=6860.

3) Converter 3 Hm^2, 584326 em ares. O are sendo egual ao Dm^2, e tendo o Hm^2 100 Dm^2, deve-se multiplicar o numero proposto por 100, e tem-se: 358 Dm^2, 4326.

4) Converter 64586^{m2}, 0246 em hectares. Para se converter em Dm^2 ou ares, divide-se por 100; para se converter em Ha ou Hm^2, divide-se por 10000 (100×100), dando, portanto, 6 Ha, 45860246.

5) Converter 7 Ha, 468976 em m^2. Sabendo-se que o Ha=Hm^2, e que, para converter-se o ultimo em Dm^2, deve-se multiplicar por 100, e em m^2, por 10000 (100×100); tem-se o resultado: 71689, 76.

6) Converter 94 Dm^3, 4566 em litros. O litro sendo egual ao dm^3, a questão se reduz a uma conversão á ultima unidade. Para se converter Dm^3 em l, multiplica-se por 1000; em dl, por 1000000 (1000×1000): 94 Dm^3, 4567×1000000=94456700 dm^3 ou litros.

8) Converter 6438 Dl, 46 em Dm. 6438 Dl, 49=643841^l, 9 ou 64384 dm^3 9, que, convertidos em Dm^3—para o que são divididos por 1000000—dão 0 Dm^3, 0643849.

9) Escrever os nomes dos multiplos e sub-multiplos do grammo, com seus valores em metros.

10) Escrever em metros, depois sommar: 5 myriametros, 6 kilometros, 7 hectometros, 3 decametros.

11) Escrever em metros, depois sommar: 3^{Mm}, 6; 4^{Km}, 8; 3^{Hm}, 45; 9^{Dm}, 895.

12) Escrever como numeros decimaes: 25 metros e 3 centimetros; 14 metros e 3 centimetros, 14 metros e 9 decimetros, 17 metros e 95 millimetros, 8 metros e 18 deci-millimetros.

13) Dizer quantos myriametros, kilometros, hectometros, etc., ha em 8543296 centimetros.

14) Dizer quantos centilitros ha em 8972 kilometros e em 976543 deci-millimetros.

15) Dizer quantos ares, hectares, ha em 4586 metros quadrados? em 37680 decametros quadrados? em 796543 centiares?

16) A razão de 4$520 o metro quadrado, quanto valem 2 ares de terreno? 4 hectares? 268 centiares? 3 ares e 46 centiares?

17) Quantos cubos de um decimetro de lado pode-se fazer entrar num cubo de 1 metro de lado?

18) Quantos cubos de 1 centimetro de lado pode-se fazer entrar num cubo de um decimetro de lado?

19) Quantos decimetros cubicos ha em 3 metros cubicos? e em 1 millimetro cubico?

20) Escrever 6 metros cubicos e 85 decimetros cubicos; 7 metros cubicos e 94 centimetros cubicos; 9 metros cubicos e 9 millimetros cubicos.

21) Quantos litros vale um metro cubico? e hectolitros? e decalitros? e centilitros?

22) Escrever em metros cubicos e sommar: 35 hectolitros, 429 decalitros, 68 litros?

23) De um metro cubico subtrahir: *a)* 9 hectolitros; *b)* 426 litros; *c)* 6 decalitros.

24) Qual é, em kilos, o peso: *a)* de um centimetro cubico de agua; *b)* de 1 metro cubico de agua; *c)* de um litro de agua; *d)* de 58 centilitros de agua; *e)* de 1 decalitro de agua; *f)* de 2 decalitros e 5 litros de agua; *g)* de 6 litros e 7 decilitros de agua.

25) Tomando-se o litro por unidade, dizer o peso dos seguintes volumes de agua: 1 kilo; 7 kilos; 6 decagrammos; 8 hectogrammos.

26) Um barril continha um hectolitro de oleo; tirando-se-lhe 60^{l}, 65, quanto de oleo resta no barril?

27) Um negociante tinha 17 hectolitros de castanhas, dos quaes vendeu 850 litros por 60$000 e o resto á razão de $600 o decilitro. Quanto deve receber?

28) Uma escada tem 28 degraus de 20^{m}, 50 cada um. Dizer a altura da escada.

29) Custando $400 o kilo de sabão, qnal o preço de um quintal? e de uma tonelada?

30) Um decimetro cubico de ferro pesa 7^{Kg}, 5; quanto pesam: 1^{m3} de ferro? 2^{m3},043?

31) O decalitro de carvão vale $300; quanto valem 2^{Hl}, 456?

32) 120^{l} de oleo mineral pesam 105 kilos. Dizer, em grammas, o peso do litro deste oleo.

33) Um fazendeiro tem 60^{Hl}, 48 de trigo; elle vende a quarta parte a 25$600, a sexta parte do restante a 27$000, e o restante a 24$000. Quanto deve receber?

34) Um cavallo faz, a trote, 5, 46^{Km} por hora; quantos metros faz elle por minuto?

35) 12 operarios devem fazer 3648^{m} de obra em 14 dias de 8 horas de trabalho.

Quantos metros cada um deverá fazer por hora?

36) Num centilitro de vinho ha 2 millilitros de alcool. Quantos litros de alcool contém um tonnel de 360^{l}?

38 Um pai de familia gasta na media, por dia, $200 de fumo e $150 de aguardente.

Com o dinheiro que elle gasta assim durante 3 annos, quanto metros quadrados poderia comparar de terreno valendo 16$000 o are?

38) Si 4^{m3} 3 de agua salgada contêm 140^{g} de sal, quanto de sal se poderá retirar de uma caldeira que contenha 1^{m3} de agua salgada?

39) Em 7 dias de 8 horas e meia, 6 operarios cavaram um fosso de $2,20^{m}$ de comprimento, 2^{m}, 60 de largura e 5^{m}, 80 de profundidade. Quantos metros cubicos de terra deu a operação?

40) Qual é, em ares, a superficie cultivada de um jardim de 180^{m} de comprimento por 44 de largura, havendo 5 ruas no sentido do comprimento e 6 no sentido da largura, cada uma de $1,^{m}40$ de largura?

41) Quanto valem 6844 moedas de $400?

Systema metrico decimal: — Conversão de medidas antigas em modernas e vice-versa. P. e q. práticas.

160) MEDIDAS ANTIGAS DE COMPRIMENTO.

O metro, com seus multiplos e subm., substituiu as medidas antigas de comprimento: *Legua brazileira* =6600^m ou 3000 braças; *legua maritima* = 5555^m, 55 ou 3 milha; *milha* = 1851^m, 85 ou 841, 75 braças; *braça* = 2^m, 2 ou 2 varas; *vara* = 1^m, 1 ou 5 palmos (P); *palmo* = 0^m, 22 ou 8 pollegadas (P) *pollegada* = 0^m, 0275 ou 12 linhas; *linha* = 12 pontos; *pé* = 0^m, 33 ou 1, 5 palmo; *covado* = 0^m, 66 ou 3 palmos; *toesa*, 9 palmos; *passo geometrico*, 1^m, 65; *jardas*, 4 palmos; *auna*, 5 palmos; *estadio*, 125 passos; *cabo* = 200^m; *nó* ($\frac{1}{20}$ da milha maritima) = 15,^{m} 430.

161) MEDIDAS ANTIGAS DE SUPERFICE

Legua brazileira quadrada = 43560000^{m2}, 9000000 br.^{2}; *Legua maritima quadrada* = 30864135^{m2}, 8025, ou 9 milhas; *milha quadrada* = 34293 48^{m2}, 708543, 0625 br.^{2}; *braça quadr.* = 4^{m2} 84^a ou 4 varas^2; *vara quadr.* = 1^{m2}, 21 ou 25 palmos^2; *palmo quadr.* = 0^{m2},0484, ou 64 pollegadas^2; *pollegada quadr.* = 144 linhas^2; *alqueire de terra* = 24200^{m2} ou 5000 br.^{2}; *geira* = 1936^{m2}, ou 400 br.^{2}.

Nota: O estudante não precizará reter sinão os dois ultimos valores, pois, quando precizar de qualquer outro, tomará o da medida de comprimento e o elevará ao quadrado, para o que deve multiplical-o por si mesmo.

162) MEDIDAS ANTIGAS DE CAPACIDADE

Moio = 15 fangas; *fanga* = 4 alqueires; *alqueire* 4 quartas; *quarta* = 4 selamins; *selamin* = 2^l, 26. *Pipa* = 15 almudes; *almude* = 12 canadas; *canada* = 4 quartilhos; *quartilho* = 0^l, 665.

Nota: Os outros valores o estudante deduzira dos valores do quartilho ou do selamin.

Tabella do systema metrologic

MEDIDAS LINEARES

		metros
Legua brazileira	3000 brs.	6600
Legua maritima	3 milhas	5555,55
Milha	841 $^3/_4$ brs.	1851,85
Braça	2 varas	2,2
Toeza	9 palmos	1,98
Passo	5 pés	1,65
Vara.	5 palmos	1,1
Jarda	4 »	0,914
Covado	3 »	0,66
Pé	1 $^1/_2$ »	0,33
Palmo	8 pollegs.	0,22
Pollegada . . .	12 linhas	0,0275
Linha	12 pontos	0,00229
Ponto	— — — —	0,00019

MEDIDAS DE CAPACIDADE

			litros
PARA SECCOS	Moio	15 fangas	2176,2
	Fanga	4 alqs.	145,08
	Alqueire	4 quartas	36,27
	Quarta	4 selam.	9,07
	Selamin	— — — —	2,27
	Alq. paulista	— — — —	50
PARA LIQUIDOS	Tonél	2 pipas	958,32
	Pipa	15 alms.	480
	Almude	12 cans.	31 94
	Pote	6 cans.	15,96
	Canada	4 quart.	2,66
	Quartilho	4 marts.	0,66
	Martellinho	— — — —	0,165

To
Qui
Ar
Lib
Ar
Ma
Para objectos preciosos: On
Oi
Dr
Es
Qu
Gr

MEDIDAS SUPERFICIAES

Legua quadrada	9 milhas quadradas	
Braça »	4 ^{v} quads.	4^{m2}, 84
Vara »	25 ^{P} »	1,21
Palmo »	64 ^{p} »	0,0484
Pollegada »	144 ^{l} »	— — — —
Alqueire de terra	5000 ^{br} »	24200 ^{m2}
Geira	400 ^{br} »	1936 ^{m2}
— — — — —	— — — —	— — — —
— — — — —	— — — —	— — — —
— — — — —	— — — —	— — — —

MEDIDAS DE TEMPO

Seculo.	100 annos
Lustro	5 »
Anno	12 mezes
Mez	30 dias
Semana	7 »
Dia.	24 horas
Hora	60 minutos
Minuto	60 segundos
Anno civil	365 dias
» commercial. .	360 »

Me

Circum
Quadra
Grau .
Minuto
Segund
— —
— —
— —
— —
— —

Tabella do systema metrologico brazileiro

MEDIDAS LINEARES

		metros
Legua brazileira	3000 brs.	6600
Legua maritima	3 milhas	5555,55
Milha	841 $^{3}/_{4}$ brs.	1851,85
Braça	2 varas	2,2
Toeza	9 palmos	1,98
Passo	5 pés	1,65
Vara.	5 palmos	1,1
Jarda	4 »	0,914
Covado	3 »	0,66
Pé	1 $^{1}/_{2}$ »	0,33
Palmo	8 pollegs.	0,22
Pollegada . . .	12 linhas	0,0275
Linha	12 pontos	0,00229
Ponto	— — — —	0,00019

MEDIDAS DE CAPACIDADE

			litros
PARA SECCOS	Moio	15 fangas	2176,2
	Fanga	4 alqs.	145,08
	Alqueire	4 quartas	36,27
	Quarta	4 selam.	9,07
	Selamin	— — — —	2,27
	Alq. paulista	— — — —	50
PARA LIQUIDOS	Tonél	2 pipas	958,32
	Pipa	15 alms.	480
	Almude	12 cans.	31 94
	Pote	6 cans.	15,96
	Canada	4 quart.	2,66
	Quartilho	4 marts.	0,66
	Martellinho	— — — —	0,165

MEDIDAS DE PESO

			grammos
	Tonelada	13 $^{1}/_{2}$ quint.	793^{Kg},99
	Quintal	4 arrobas	58,74
	Arroba	32 lbs.	14,68
	» paulista	— — — —	15,00
	Libra	2 marcos	458 ^{g},9
	Arrátel	— — — —	358,9
	Marco	8 onças	229,45
Para objectos preciosos	Onça	8 oits.	28,68
	Oitava	3 escrops.	3,58
	Drachma	» »	3,58
	Escropulo	6 quils.	1,19
	Quilate	4 grãos	0,29
	Grão	— — — —	0,0725

MEDIDAS SUPERFICIAES

Legua quadrada	9 milhas quadradas	
Braça »	4 ^{v} quads.	4^{m2}, 84
Vara »	25 ^{P} »	1,21
Palmo »	64 ^{P} »	0,0484
Pollegada »	144 ^{l} »	— — — —
Alqueire de terra	5000 ^{br} »	24200 ^{m2}
Geira	400 ^{br} »	1936 ^{m2}

MEDIDAS DE TEMPO

Seculo.	100 annos
Lustro	5 »
Anno	12 mezes
Mez	30 dias
Semana	7 »
Dia.	24 horas
Hora	60 minutos
Minuto	60 segundos
Anno civil	365 dias
» commercial. .	360 »

Medidas de angulos e arcos

Circumferencia . .	4 quadrs.
Quadrante . . .	90 º
Grau	60'
Minuto	60"
Segundo. . . .	10 decimos de segundo

163) MEDIDAS ANTIGAS DE PESO

Tonelada = 13, 5 quintaes ; *quintal* = 4 arrobas ; *arroba* = 32 libras ; *libra* = 2 marcos; *marco* = 8 onças ; *onça* = 8 oitavas ; *oitava* = 3 escrópulos ou 3g, 58 ; *escrópulo* = 6 quilates ; *quilate* = 4 grãos ou 0g, 049.

Nota: Do valor da oitava, ou do grão, o estudante deduzirá os demais valores.

164) MEDIDA DO TEMPO

Seculo = 100 annos ; *lustro* = 5 annos ; *anno commum*, 365 dias ; *anno commercial*, 360 dias; *mez*, 30 dias ; *dia*, 24 horas ; *hora*, 60 minutos ; *minuto*, 60 segundos.

A divisão proposta—de se dividir o dia em 16 horas, a hora em 100 minutos e o minuto em 100 segundos, não foi acceita.

165) UNIDADE ANGULAR

Circumferencia = 360 graus, ou 360° ; *grau*, 60 minutos, ou 60' ; *minuto*, 60 segundos, ou 60".

Não foi acceita a divisão proposta pela commissão organizadora do systema metrico de —se dividir a circumferencia em 400 grados, o grado em 100', e o minuto em 100".

166) PROBLEMAS E QUESTÕES PRATICAS

1) Converter 8 pipas em litros. $480^l \times 8 = 3840^l$

2) Converter 458^g em onças. 458^g : 28, 64 = 15 onças 28^g, 40.

3) Converter 108^m, 735 em braças, varas, etc. 108, 735 : 2200 = 49 br. e $0,^m$ 935; 935 : 1100 = 0 vara e $0,^m$ 935; 935 : 220 = 4 P e $0,^m$ 055; 550 : 275 = 2 p. Resultado : 49 br., 4 p e 2 p.

4) Converter 49 br, 4 P e 2 p em metros.

1 {
$49 \times 2,2$ —— = 107^m, 8
$4 \times 0,22$ —— = 0, 88
$2 \times 0,0275$ — = 0, 0550
49 br, 4 P e 1 p — 108^m, 735
}

2 {
$49^{br} \times 2 = 98^v$;
$98^v \times 5 = 190^p + 4 = 494^p$;
$494^p \times 8 = 3952^p + 2 = 3954^p$;
$3954^p \times 0,0275 = 108^m$, 735.
}

5) Converter 4723^{l}, 40 em moios, fangas, alqueires,
quartas, selamins. 472340^{cl} : 226 = 2090^{sel} ; 2090^{sel} : 4 = 522
quartas e 2 selamins ; 522^{q} : 4 = 130 alqueires e 2 quar-
tas ; 130^{alq} : = 32 fangas e 2 alq ; 32^{f} : 15 = 2 moios e
2 fangas. Resultado : 2 moios, 2 fangas, 2 alq, 2 q e 2 sel.
6) Converter 2 moios, 2 fangas, 2 alq, 2 q e 2 sel em
litros. 2 × 15 = 30 + 2 = 32 × 4 = 128 + 2 = 130 × 4 =
520 + 2 = 522 × 4 = 2088 + 2 = 2090 sel × 2, 26 = 4723^{l}, 40.
7) Uma terra que tem 7 Ha 26 de superficie, é alu-
gada por 1:573$000 o alq. O rendeiro cultiva café, com o
que gasta 150$000 por Ha. Colhendo 1200 arrobas de ca-
fé, que vende a 7$000, qual o seu lucro total ?
7 Ha 26 tem 72600^{m2}, que, divididos por 24.200^{m}, va-
lor de um alqueire, dão para superficie 3 alq, donde seu
aluguel de 4:717$000.
A despeza é de 150$ por Ha ou 1$500 por aro, don-
de 1:050$000 (7 Ha × 150$) + 39$000 (26 × 1$500) =
1:089$000, que, com a despeza do arrendamento, (4:718$)
= 5:808$000 — despeza total.
1200 ar. de café a 7$000 dão 8:400$000 ; deduzin-
do-se a despeza, verifica-se um lucro de 2:892$000
8) Qual o valor de 1^{l} de vinho, sendo 576$000 o pre-
ço de 2 pipas ? 960^{l} (2 pipas) = 576$000 ; 1^{l} = 576$000 :
960 = $6 0.

9) Custando 3 Kg 400 de pó de café 4$080, qual se-
rá o preço de 6 Kg 500 ? 4080000 : 3400 = 1$200, preço
de 1 Kg. 1$200 × 6, 5 = 7$800.
10) Custando 1 quintal métrico de carvão 6$200,
qual será o preço de 1 tonelada métrica e 4 Kg ? Tendo
o quintal métrico 100 Kg, 6$200 : 100 = $062, preço de
1 Kg. Multiplicando este valor por 1004 Kg, tem-se o re-
sultado : 62$258.
11) Qual o preço de 124^{m}, 65 de fazenda, sabendo-se
que o 0^{m}, 1 custa $250 ? 1246^{dm}, 5 × $250 = 311$625.
12) Custando 124^{m}, 65 de fazenda, 311$625, qual o
preço de um covado ? 311$625 : 12465 = $025, preço de
0^{m}, 01 ; multiplicando-se este preço por 66 (o cov. tem 0^{m},
66), tem-se 1$650, preço de um covado.
13) Quantos litros de feijão poderão ser comprados
com 30$000, sabendo-se que 6^{l}, 8 custam 1$020 ? 1$020 :
58 = $015 (preço de 1 dl) ou $150, preço de 1^{l}. 30$000 :
150 = 200^{l}, resposta pedida.

14) Dizer a quantos ; a) leguas ; b) milhas ; c) braças;
d) palmos e) pollegadas, correspondem 28645^{m}.
15) Dizer a quantas: a) leguas quadradas ; b) milhas
quadradas ; c) braças quadradas ; d) palmos quadrados ; e)
pollegadas quadradas, correspondem 28645^{m2}.
16) Dizer a quantos : a) moios ; b) fangas ; c) alquei-
res ; d) selamins ; f) pipas ; g) canadas ; h) quartilhos, cor-
respondem 2864^{l}.
17) Dizer a quantos ; a) toneladas ; b) arrobas ; c) li-
bras ; d) quilates, correspondem 3980^{kg}.
18) Reduzir 2 leguas, 2 milhas, 2 braças, 2 palmos e
2 pollegadas a metros.
19) Reduzir 5 pipas, 6 almudes, 8 covados e 2 quar-
tilhos a litros.
20) Reduzir 1 tonelada, 2 quintaes, 3 arrobas, 4 li-
bras e 6 onças a grammas.
21) Quanto custam 4,^{kg} 600 de carvão, sendo de 3$800
o preço de 1 arroba ?
22) Uma quarta de feijão custa 1$800 ; qual o preço
de 65 litros ?
23) Tres covados de fazenda custam 3$600 ; qual o
preço de uma braça ?
24) Uma canada de vinho custa 3$200 ; qual o pre-
ço de 35^{l} ?
25) Uma tonelada de carvão custava 200$000 ; hoje,
uma tonelada metrica custa 250$000. Qual o preço mais
conveniente ?
26) Comprou-se um sitio medindo 18 alqueires de ter-
ra, por 9:000$000. Quanto custa cada metro quadrado ?
27) Uma grosa de lapis Faber custa 20$000 ; qual o
valor de um lapis ?
28) A quantos alqueires actuaes correspondem 5 alquei-
res antigos ?
39) A quantas arrobas actuaes correspondem 10 arro-
bas antigas ?
30) A quantos hectolitros correspondem $12\frac{1}{2}$ almudes ?
31) Um cyclista, percorrendo 2 leguas e $\frac{1}{3}$ por hora,
sahiu quatro horas antes de outro que percorre 15^{Km},5
por hora. Que tempo levará o 2.º para alcançar o 1.º ?
32) Uma torneira funccionava durante 3 horas e 20
minutos para encher de agua um vaso que, cheio, pesa 2

arrobas antigas e, vasia, 4 libras antigas. Quanto tempo leva a torneira para fornecer 2^{lll}?

33) Si 920^g de assucar custam $600, qual o preço de 1 arroba antiga?

34) Custando o kilo de café 1$200, quantas libras antigas se poderiam comprar com 20$000?

35) Um negociante combinou com outro a permuta de 20 alqueires antigos de feijão por vinho, recebendo o primeiro $\frac{3}{4}$ de um almude de vinho por alqueire de feijão. Dizer, em hectolitros, quanto cada um devia fornecer.

36) Um campo medindo 8 geiras foi comprado por 1:500$000. Dizer o preço do hectometro quadrado.

37) Custando o hectolitro de vinho 45$000, qual o preço de 2 pipas.

38) Um sacco de farinha pesando 12 arrobas foi comprado por 60$000. Qual o preço do kilo? Qual o volume occupado pela mesma?

49) Num celleiro de 4 covados de comprimento por 6 palmos de largura, ha trigo até 1 vara de altura. Achar o valor deste trigo, sendo de 2$200 o preço do decalitro.

40) Um commodo quadrado de 2 braças de lado deve ser ladrilhado com ladrilhos de 5 pollegadas de lado. Quantos são precizos?

Quadrado e raiz quadrada dos numeros inteiros e das fracções.

167. POTENCIAS.

O producto de um numero por si mesmo, eis o que se chama *potencia*. Sendo um producto de dois factores, tem-se a *2.ª potencia* do numero, ou o *quadrado*; sendo de tres, tem-se a *3.ª potencia*, ou o *cubo*: de 4, a *4.ª potencia*, e assim por diante.

Para se elevar uma fracção a uma potencia qualquer, elevam-se a esse grau de potencia ambos os termos da

fracção $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343}$.

168. EXPOENTE.

O grau de potencia, ou o numero de factores, representa-se pelo expoente, que é o algarismo collocado á direita e um pouco acima do numero considerado. 6^2, 8^3, 19^8, lêm-se: 6 quadrado (ou o quadrado de 6, ou 6 elevado ao quadrado), 8 cubo, 19 oitava potencia.

Os quadrados dos 10 primeiros numeros são:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

169. COMPOSIÇÃO DO QUADRADO.

O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades consta: a) do quadrado das dezenas; b) do dobro do producto das dezenas pelas unidades, e c) do quadrado das unidades.

Provemol-o com o numero 32:

$$\begin{array}{l} 30 + 2 \\ \underline{30 + 2} \\ 30^2 + 30 \times 2 \\ \underline{\quad\quad 30 \times 2 + 2^2} \\ 30^2 + 2\,(30 \times 2) + 2^2 \end{array}$$

Effectuando-se a somma desses productos, tem-se 900 +120+4=1024, que é, com effeito, o quadrado de 32.

170. DIFFERENÇA DOS QUADRADOS.

A differença do quadrado de dois numeros inteiros consecutivos é egual ao dobro do menor mais um.

Com effeito: sendo 30^2 o quadrado de 30, e $30^2 + 2 (30\times1)+1^2$ o quadrado de 31, sua differença é $2 (30\times1) +1^2 = 61$, differença dos productos considerados.

171. RAIZ.

Raiz de um numero é aquell'outro que, elevado a certo grau de potencia, reproduz o numero dado.

172. GRAU DE RAIZ.

E' o expoente ao qual é necessario elevar a raiz, para se ter o numero.

173. RAIZ QUADRADA.

Raiz quadrada de um um numero é aquell'outro que, elevado ao quadrado, reproduz o dito numero. O *indice* collocado no angulo do signal radical $\sqrt{}$, marca o grau de raiz que se vai extrahir.

O signal radical, sem indice, indica raiz quadrada.

Na extracção da raiz quadrada, consideram-se dois casos:

1.º—*Raiz quadrada dos inteiros;*
2.º— « « *das fracções.*

174. RAIZ QUADRADA DOS INTEIROS.

Na raiz quadrada dos inteiros, consideram-se ainda 3 casos:

1.º—*Raiz quadrada dos numeros de 1 a 100;*
2.º— « « « « *100 a 10000;*
3.º— « « « « *maiores do que 10000.*

1.º caso

Para o 1.º caso, basta saber de cór os quadrados dos 10 primeiros numeros inteiros; si o quadrado for perfeito, será um destes 10 primeiros numeros; si não, estará contido entre elles. $\sqrt{36} = 6$. $7 > \sqrt{48} > 6$.

2.º caso

Seja para extrahir a raiz quadrada de 8536.

$$\begin{array}{r|l} d^2 + 2\ du + u^2 + R = 85.\dot{3}6 & 9^d\ 2^u \\ 2\ du + u^2 + R = 43.\ 6 & 182\times2=364 \\ R = \quad 72 & (2\ d+u)\times u=2\ du+u^2 \end{array}$$

O quadrado das dezenas não podendo ser sinão centenas, achar-se-á nas centenas do numero proposto, as quaes são separadas por 1 ponto.

Subtrahindo o quadrado de 9 dezenas do numero considerado, obtem-se o numero 436, que encerra as outras duas partes; dobro do producto das dezenas pelas unidades e quadrado das unidades.

O dobro do producto das dezenas pelas unidades dá pelo menos dezenas, que são separadas por 1 ponto. As dezenas separadas não contêm talvez sinão as dezenas da parte 2 du, pois é provavel contenham tambem as dezenas resultantes do quadrado das unidades e as do resto.

Dividindo as dezenas separadas pelo dobro da raiz achada, obtem-se o algarismo das unidades, que cumpre verificar si é fraco ou forte.

Para verifical-o, colloca-se elle ao lado de 18 (2 d) e multiplica-se o numero 182 (2 d + u) por 2, obtendo se assim o dobro do producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades ($2\ du + u^2$). Si esta somma não puder ser subtrahida de 436, o algarismo das unidades é *forte*; si, subtrahido, der um resto que seja maior do que o dobro da raiz mais um, é *fraco*.

3.º caso

O numero proposto é maior do que 10.000. Seja, por exemplo, o numero 6.54.78

Do mesmo modo: O quadrado das dezenas não pode ser sinão centenas, pelo que são estas separadas. Passando a considerar apenas a parte formada pelos 3 primeiros algarismos, verifica-se que ella consta de dezenas e unidades; e pois, separam-se as centenas, que outra cousa não póde dar o quadrado das dezenas. Assim, o 3.º caso é a repetição do 2.º. E' a seguinte, portanto, a

Regra: Divide-se o numero em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda.

Acha-se o maior quadrado contido na 1.ª classe á esquerda, e a raiz respectiva escreve-se á direita do numero.

O quadrado desta raiz é subtrahido da 1.ª classe á esquerda.

A' direita do resto baixa-se a classe seguinte, e, separando-se o ultimo algarismo á direita, dividem-se os demais pelo dobro da raiz achada, obtendo-se o 2.º algarismo da raiz.

O 2.º algarismo da raiz é escripto á direita do dobro da raiz, e o numero assim formado é multiplicado pelo referido 2.º algarismo, e subtrahido do numero formado pelo resto e pela 2.ª classe abaixada.

A' direita do 2.º resto escreve-se a 3.ª classe, e assim se procede até se terem considerado todas as classes.

Quando não puder ser effectuada a subtracção, é que o algarismo da raiz é *forte*; quando o resto for egual ao dobro da raiz mais um, é que elle é *fraco*.

4.89.74.16	2213		
4	2×2=4	22×2=44	221×2=442
08.9	42	441	4423
8 4	2	1	3
57.4	84	441	13269
44 1			
13 31.6			
13 269			
47			

Nota.—Quando, depois de abaixar uma classe, se verificar que o resto seguido dessa classe, menos o ultimo algarismo da direita, não contém o dobro da raiz, põe-se zero na raiz e baixa-se a classe seguinte.

175. Pode-se obter a raiz com a approximação que se quizer, para o que basta accrescentar dois zeros para cada decimal que se queira obter.

176. Quando o numero proposto for decimal, torna-se elle de numero par de decimaes, extrahe-se a raiz achada e separa-se metade de decimaes do numero proposto.

Extrahir a raiz quadrada de 4,567.

4.56.70	213	
4	2×2=4	21×2=42
05.6	41	423
4 1	1	3
1 57.0	41	1269
1 26 9		
30 1		

Raiz quadrada – 2,13

177. RAIZ QUADRADA DAS FRACÇÕES.

1.º caso — O denominador é quadrado.
2.º caso. — O denominador não é quadrado.

1.º caso

Extrahe-se a raiz exacta ou approximada do numerador, bem como a do denominador.

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7} \qquad \sqrt{\frac{15}{49}} = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

2.º caso

Multiplicam-se ambos os termos pelo denominador, e procede-se como no primeiro caso.

$$\sqrt{\frac{24}{32}} = \frac{\sqrt{24 \times 32}}{32}$$

178. RAIZ QUADRADA COM APPROXIMAÇÃO.

Um numero não sendo quadrado, sua raiz é incommensuravel, mas pode ser extrahida com a approximação que se quizer.

1.º caso

Extrahir a raiz quadrada de 62, a menos de $\frac{1}{5}$.

$$\sqrt{62} = \sqrt{\frac{62 \times 5^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{62 \times 25}}{5} =$$

$$\frac{\sqrt{1550}}{5} > \frac{39}{5} \text{ e } < \frac{40}{5}$$

Regra: Quando a fracção que indicar a approximação tiver para numerador a unidade, multiplica-se o numero proposto pelo quadrado do denominador, e extrahe-se a raiz do producto que se divide pelo mesmo denominador.

2.° caso

Extrahir a raiz quadrada de 28, a menos de $\frac{3}{4}$.

$$\sqrt{28} = \sqrt{\frac{28 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \sqrt{\frac{28 \times \frac{16}{9}}{\frac{4}{3}}} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{448}{9}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{448}{3}}}{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{448}{4}}$$

Regra: Multiplica-se o numero proposto pelo quadrado da fracção invertida e extrahe-se a raiz, que se divide pela mesma fracção invertida; ou

Multiplica-se o numero proposto pelo quadrado do denominador, e extrahe-se a raiz que se divide pelo mesmo denominador.

179. PROBLEMAS E QUESTÕES PRATICAS.

1) Extrahir a raiz quadrada dos numeros inteiros: 31, 95, 445, 689, 2376, 453286, 432019876.

2) Extrahir a raiz quadrada dos numeros decimaes: 4, 654; 2, 008632; 0, 04397; 145, 6.

3) Extrahir a raiz quadrada das seguintes fracções: $\frac{3}{6}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{12}{44}$, $\frac{16}{58}$, $\frac{72}{81}$, $\frac{13}{144}$, $\frac{148}{385}$.

4) Extrahir a raiz quadrada: de 14, com approximação de $\frac{1}{9}$; de 25, com approximação de $\frac{1}{100}$; de 142, com approximação de $\frac{3}{10}$; de 214, com approximacão de $\frac{4}{12}$.

5) Dar a composição do quadrado dos numeros seguintes: 13, 45, 269, 1358.

6) Achar a differença entre os quadrados de 8 e 9, de 43 e 44, de 3258 e 3259.

7) Qual é, com approximação de 1^m, o lado de um terreno quadrado que tem 8 Ha, 07143 de superficie?

8) Um quadrado tem 220^m; qual será o lado de um quadrado 16 vezes maior?

9) Qual é o numero cujos $\frac{3}{5}$ multiplicados pelos $\frac{3}{7}$ dão o producto 2140?

10) Tres numeros estão entre si com $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$; a somma de seus quadrados é549. Quaes são esses numeros?

11) Quanto de tempo se levaria para fazer o giro de um jardim que tem 12 Ha, 046 de superficie, percorrendo-se 52^m por minuto?

12) Um campo quadrado, tendo 36^m de lado, produz 85 alq. de batatinha; qual deve ser, com approximação de 0,^{m} 001, o lado de um outro campo que produz 250 alq.?

13) Quaes são as dimensões de um rectangulo que tem 18^m, 24 de superficie, e cujo comprimento é o quadrado da largura?

14) O preço dos diamantes é proporcional ao quadrado do peso. Suppondo que o quilate de diamante valha 1:200$000, qual será o peso, a $\frac{1}{8}$ de quilate de approximação, de um diamante que vale 248:000$000?

15) Numa caixa, cuja largura é os $\frac{3}{4}$ do comprimento, despeja-se agua até 0^m, 36 de altura; a caixa contem, então, 3800^l d'agua. Achar o comprimento e a largura da caixa.

16) O quadrado do quociente de dois numeros é 2443295, o quadrado de sua somma é 2197734400. Quaes são os dois numeros?

17) A somma dos quadrados de dois numeros é 2197734400; o menor é 32. Qual é o maior?

18) A somma de dois numeros é 210; o quadrado de sua differença é 1764. Quaes são os dois primeiros numeros?

19) A differença de dois numeros é 42; o quadrado de sua somma é 44100. Quaes são os dois primeiros numeros?

20) A differença do quadrado de dois numeros é 2576; o maior é 60. Qual o menor?

21) Um terreno quadrado deve conter 46800 arvores. Quantas se devem plantar de cada lado?

22) Qual é, com approximação de 0,001, o lado de um quadrado cuja superficie é de 7 Ha, 854?

23) Semearam-se 468 grãos de milho; no anno seguinte, semeia-se toda a colheita precedente, de sorte que se obtem, no fim de dois annos, 8645674 grãos. Supppondo que cada grão dê o mesmo producto, qual o numero de grãos colhidos por anno, e correspondente a cada grão semeado?

Cubo e raiz cubica dos numeros inteiros e fracções

180. CUBO

de um numero é o producto do numero por si mesmo duas vezes.

Os cubos dos 10 primeiros numeros, são:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
1, 9, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

181. COMPOSIÇÃO DO CUBO.

O cubo de um numero composto de dezenas e unidades consta: a) do cubo das dezenas; b) do triplo do quadrado das dezenas pelas unidades; c) do triplo das dezenas pelo quadrado das unidades; d) do cubo das unidades.

Provemol-o com o numero 32:

$$
\begin{array}{l}
30 + 2 \\
30 + 2 \\
\hline
30^2 + 30 \times 2 \\
\qquad 30 \times 2 + 2^2 \\
\hline
30^2 + 2\,(30 \times 2) + 2^2 \\
30 + 2 \\
\hline
30^3 + 2\,(30^2 \times 2) + 30 \times 2^2 \\
\qquad (30^2 \times 2) + 2\,(30 \times 2^2) + 2^3 \\
\hline
30^3 + 3\,(30^2 \times 2) + 3\,(30 \times 2^2) \times 2^3
\end{array}
$$

Effectuando a somma desses productos, tem-se: 27000 + 5400 + 360 + 8 = 32768, que é, de facto, o cubo de 32.

182. DIFFERENÇA DOS CUBOS.

A differença do cubo de dois numeros inteiros consecutivos é egual ao triplo do quadrado do menor, mais o triplo do menor, mais um.

O cubo de 31 é $30^3 + 3\,(30^2 \times 1) + 3\,(30 \times 1^2) + 1^3$ e o de 30 é 30^3. Effectuando a subtracção, acha-se para differença $3\,(30^2 \times 1) + 3\,(30 \times 1^2) + 1^3$, o que corresponde ao enunciado.

Por letras: o cubo de $a + 1$ é $a^3 + 3a^2 + 3.a + 1$, e o cubo de a é a^3; sua differença é, pois, $3a^2 + 3a + 1$.

183. RAIZ CUBICA

de um numero é aquell'outro que, elevado ao cubo, reproduz o dito numero. O numero 3, collocado no logar do indice $\sqrt[3]{}$, marca a raiz cubica.

Na extracção da raiz cubica, consideram-se dois casos:

1.º—*Raiz cubica dos inteiros;*
2.º— « « *das fracções;*

184. RAIZ CUBICA DOS INTEIROS.

Na extracção da raiz cubica dos inteiros, distinguem-se 3 casos:

1.º—*Raiz cubica de numero inferior a 1.000;*
2.º— « « « « *comprehendido entre 1.000 e 1.000.000;*
3.º—*Raiz cubica de numero superior a 1.000.000.*

1.º caso

Basta saber de cór os cubos dos primeiros numeros, para se resolver este caso.

2.º caso

Sendo o numero composto de dezenas e unidades, seu cubo consta das 4 partes já referidas.

$$d^3 + 3\,d^2 u + 3\,du^2 + u^3 + R =$$

45.864	35	
27	$3 \times 3^2 = 27$	
188.64	3×30^2	$= 2700 = 3\,d^2$
158 75	$3 \times 30 \times 5 =$	$450 = 3\,du$
R 29 89	5^2	$= 25$
		3175×5

O cubo das dezenas dá, pelo menos, milhares. Separando, então, os 3 ultimos algarismos, e extrahindo a raiz cubica da parte á esquerda, ter-se-á o algarismo das dezenas da raiz.

A' direita do resto escreve-se a parte seguinte, que contém as 3 partes restantes: $3\,d^2u$, $3\,du^2$, u^3.

O triplo do quadrado das dezenas pelas unidades dá, pelo menos, centenas. Separam-se, pois, estas centenas. Ellas podem, entretanto, conter reservas das 2 ultimas partes. Dividem-se, pois, as centenas separadas pelo triplo do quadrado das dezenas, ou 27 centenas, e encontra-se o algarismo das unidades, que pode ser *forte* ou *fraco*.

Para verificar si o algarismo das unidades é forte ou fraco, ha dois methodos:

1.º — Elevar 35 ao cubo e subtrahil-o de 45864;

2.º — Subtrahir do resto as 3 ultimas partes: $(3 \times 30^2 \times 5) + (3 \times 30 \times 5^2) + 5^3 = 13.500 + 2.250 + 125 = 15.875$.

O resto deve ser menor que o triplo do quadrado da raiz achada, mais o triplo da raiz, mais um.

3.º caso

O cubo das dezenas da raiz dá, pelo menos, milhares. Separam-se, pois, os 3 ultimos algarismos. O mesmo raciocinio applicado á parte que for ficando á esquerda, determinará a divisão do numero em classes de tres algarismos, a começar da direita. Para a resolução applica-se, successivamente, a regra anterior.

70,854,327,680	4137			
64	$4^2 \times 3 = 48$	$41^2 \times 3 = 5043$	$413 \times 3 = 511707$	
68.54	$3 \times 40^2 = 4800$	$3 \times 410^2 = 504300$	$3 \times 4130^2 = 51170700$	
49 21	$3 \times 40 \times 1 = 120$	$3 \times 410 \times 3 = 3690$	$3 \times 4130 \times 7 = 86730$	
19 33 327	1^2 1	3^2 27	7^2 49	
15 24 051	4921	508017	51257479	
409 276 680	$\times 1$	$\times 3$	$\times 7$	
358 802 353	4921	1524071	358802353	
50 473 227				

Regra.—Divide-se o numero em classes de 3 algarismos, a partir da direita. Extrahe-se a raiz cublica da 1.ª classe á esquerda, obtendo-se o 1.º algarismo da raiz, que se eleva ao cubo e se subtrahe da referida classe.

A' direita do resto, baixa-se a classe seguinte, separam-se os 2 ultimos algarismos da direita e divide-se a parte á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada, obtendo-se o 2.º algarismo da raiz. Para verificar si este algarismo não é *forte* nem *fraco*, formam-se as 3 partes do

70,854,327,680	4137		
64	$4^2 \times 3 = 48$	$41^2 \times 3 = 5043$	$413 \times 3 = 511707$
68.54	$3 \times 40^2 = 4800$	$3 \times 410^2 = 504300$	$3 \times 413\,0^2 = 51170700$
49 21	$3 \times 40 \times 1 = 120$	$3 \times 410 \times 3 = 3690$	$3 \times 4130 \times 7 = 86730$
19 33 327	1^2 1	3^2 27	7^2 49
15 24 051	4921	508017	51257479
409 276 6 80	$\times 1$	$\times 3$	$\times 7$
358 802 3 53	4921	1524071	358802353
50 473 2 27			

Regra.—Divide-se o numero em classes de 3 algarismos, a partir da direita. Extrahe-se a raiz cublica da 1.ª classe á esquerda, obtendo-se o 1.º algarismo da raiz, que se eleva ao cubo e se subtrahe da referida classe.

A' direita do resto, baixa-se a classe seguinte, separam-se os 2 ultimos algarismos da direita e divide-se a parte á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada, obtendo-se o 2.º algarismo da raiz. Para verificar si este algarismo não é *forte* nem *fraco*, formam-se as 3 partes do

cubo e subtrahe-se a somma dos mesmos do 1.º resto seguido da 2.ª classe. (*).

A' direita do 2.º resto escreve-se a 3.ª classe, separam-se os 2 ultimos algarismos da direita, etc.

Assim se continúa até se ter ultimado a operação.

Nota.—Quando depois de baixar uma classe se verificar que o resto, seguido dessa classe menos os 2 ultimos algarismos, não contém o triplo do quadrado da raiz achada, escreve-se zero na raiz e baixa-se a classe seguinte.

Pode-se obter a raiz com a approximação que se quizer, para o que basta accrescentar 3 zeros ao resto anterior, por algarismo decimal que se queira.

Quando o numero proposto for decimal, torna-se elle de numero de decimaes multiplo de 3; em seguida extrahe-se-lhe a raiz cubica como si fosse inteiro, e separa-se, na mesma, um terço dos decimaes do numero proposto.

185. RAIZ CUBICA DAS FRACÇÕES.

1.ª caso.—O denominador é cubo.
2.º caso.—O denominador não é cubo.

1.º caso

Extrahe-se a raiz exacta ou approximada do numerador, bem como a do denominador.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7} \qquad \sqrt[3]{\frac{36}{729}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{9}$$

2.º caso

Multiplicam-se ambos os termos pelo quadrado do denominador, e procede-se como no 1.º caso.

$$\sqrt[3]{\frac{18}{41}} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 41^2}{41^3}} = \frac{\sqrt[3]{18 \times 1681}}{41}$$

(*) Pode-se tambem verificar si o 2.º algarismo é o procurado, elevando se a raiz achada ao cubo, e subtrahindo-se ella das duas primeiras classes. O mesmo para as outras classes.

186. RAIZ CUBICA COM APPROXIMAÇÃO.

1.º caso

Extrahir a raiz cubica de 28, a menos de $\frac{1}{8}$.

$$\sqrt[3]{28} = \frac{\sqrt[3]{28 \times 8^3}}{8^3} = \frac{\sqrt[3]{28 \times 512}}{8} = \frac{\sqrt[3]{14336}}{8} > \frac{24}{8} < \frac{25}{8}$$

Regra.—Quando a fracção que indicar a approximação tiver para numerador a unidade, *multiplica-se o numero proposto pelo cubo do denominador, e extrahe-se a raiz do producto, a qual se divide pelo mesmo denominador.* (*)

2.º caso

Extrahir a raiz cubica de 15, a menos de $\frac{3}{7}$.

$$\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{\frac{15 \times (\frac{7}{3})^3}{(\frac{7}{3})^3}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{15 \times 343}}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{15 \times 343}}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt[3]{15 \times 343}}{7}$$

Regra.—Multiplica-se o numero pelo cubo da fracção invertida, e extrahe-se a raiz, que se divide pela mesma fracção invertida.

187. PROBLEMAS E QUESTÕES PRATICAS.

1) Extrahir a raiz cubica dos numeros inteiros: 64, 729, 866, 25432, 4356953, 8907213476.

2) Extrahir a raiz cubica dos numeros decimaes: 3,0459; 145,976005; 0,0004897; 5,0000045.

3) Extrahir a raiz cubica das seguintes fracções:

$$\frac{64}{726}, \frac{58}{343}, \frac{498}{763}, \frac{4,05}{34,6}, \frac{25876}{49853}.$$

(*) A parte em italico pode ser considerada como uma regra abrangendo os dois casos.

4) Extrahir a raiz cubica de 14, com approximação de $\frac{1}{12}$; de 34, com approximação de $\frac{1}{100}$; de 248, com approximação de $\frac{3}{10}$; de 319, com approximação de $\frac{5}{22}$.

5) Dar a composição do cubo dos numeros seguintes: 16, 45, 269, 1358.

6) Achar a differença dos cubos de 8 e 9, de 43 e 44, de 3258 e 3259.

7) Por que numero se deve dividir 0,0085: a) para se ter 1? b) para se ter 0,48? c) para se ter 0,0846?

8) O triplo do cubo de um numero é 28,65. Qual é o numero?

9) O cubo da somma de 2 numeros é egual a 29791; o menor é 18. Qual é o maior?

10) O cubo da differença de 2 numeros é egual a 29791; o menor é 64. Qual é o maior?

11) O cubo do producto de dois numeros é 185193; o maior é 19. Qual o menor?

12) O cubo do producto de dois numeros é egual a 421876. $\frac{3}{5}$ do maior são eguaes á differença entre as raizes cubicas de 13824 e de 729. Quaes são os dois numeros?

13) Qual é a aresta de um cubo de 459686 dm³?

14) Os $\frac{3}{9}$ do cubo de um numero egualam 2956185. Qual é esse numero?

15) Quaes as dimensões de uma caixa que contem 48 Hl 664 de agua?

16) Um fazendeiro compra, a 3$580 o Hl., um certo numero de Hl, cujos $\frac{3}{4}$ egualam a differença entre os cubos de 35 e 46. Quanto deve fazer?

17) Sendo de 894 a differença entre o cubo e o quadrado de um numero, qual é o numero?

Razões e proporções

188. A *razão* de duas grandezas é o resultado da comparação entre ellas.

189. Dizendo a comparação quantas vezes uma grandeza excede a outra, ou quantas vezes contem a outra, ha duas especies de razões:

a) *Razão por differença*, ou arithmetica;
b) *Razao por quociente*, ou geometrica.

A razão por differença dá a differença que existe entre duas grandezas. A razão por differença: entre 8 e 6, é 2; entre 15 e 10, é 5; entre 48 e 32, é 16.

A razão por quociente indica quantas vezes uma grandeza contém outra. A razão por quociente: entre 8 e 4, é 2; entre 21 e 3, é 7; entre 81 e 9, é 9.

E' excusado salientar que as grandezas devem ser da mesma especie.

190. Os numeros que formam uma razão, chamam-se *termos*. O 1.º termo chama-se *antecedente*, e o 2.º *consequente*.

O signal menos, ou um ponto, separa os dois termos de uma razão por differença: 8—6 ou 8. 6. Lê-se 8 menos 6, e 8 está para 6.

O traço de fracção, ou dois pontos, separa os dois termos de uma razão por quociente: $\frac{8}{4}$ ou 8. 4. Lê-se: 8 quartos, e 8 para 4.

191. Duas razões eguaes formam uma proporção; sendo as razões por differença, a proporção toma o nome de *equidifferença*, reservando-se o termo *proporção* propriamente dita para a razão por quociente.

192. Nas equidifferenças e nas proporções, o 1.º termo e o 3.º chamam-se *antecedentes*; o 2.º e o 4.º, *consequentes*; O 1.º e o 4.º *extremos*; o 2.º e o 3.º, *meios*.

As duas razões são separadas pelo signal de egualdade, ou, ainda, por dois pontos, na equidifferença, e por 4, nas proporções. Assim: 8 — 6 = 12 — 10, ou 8.6:12.10, que se lêm: 8 menos 6 egual a 12 menos 10, e 8 está para 6 assim como 12 está para 10. $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$, ou 8 : 4 : : 12 : 6, que se lêm: 8 quartos eguaes a 12 sextos, e 8 está para 4 assim como 12 está para 6.

193. Uma equidifferença é *continua* quando os meios são eguaes. O termo medio chama-se *media arithmetica* ou *differencial*. Uma proporção é continua nos mesmos casos. O termo medio da proporção continua chama-se media geometrica ou proporcional.

194. AVALIAR AS RAZÕES

de uma equidifferença é passal-a da forma a. b : c. d para outra: a—b=c—d. Avaliam-se as razões de uma proporção passando-a da forma a : : : c : d para a outra: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

195. PROPRIEDADES DAS EQUIDIFFERENÇAS

Principio fundamental em toda equidifferença: a somma dos meios é egual á somma dos extremos.

Juntando b+d á equidifferença

a—b=c—d, tem-se :

a—b+b+d=c—d+b+d, ou, effectuando as operações : a+d =c+b, como se queria demonstrar.

Ex. : 9—3=20—14 9+ 14=20+3.

196—1.ª RECIPROCA. *Sendo a somma de dois numeros egual á somma de outros dois, os quatros formarão uma equidifferença, occupando os extremos as parcellas de uma somma, e os meios, as parcellas da outra.*

Tem-se :

a+d=b+c. Subtrahindo *b* e *d* de ambos os membros dessa egualdade, vem :

a+d—b—d=b+c—b—d, e simplificando :

a—b=c—d, ou a.b:c.d, como se queria demonstrar.

197—CONSEQUENCIA. *Uma equidifferença não se altera, sommando-se ou subtrahindo-se, a um extremo e a um meio, a mesma quantidade; egualmente não se altera multiplicando-se-lhe ou dividindo-se-lhe todos os termos por qualquer numero*, pois em nenhum desses casos soffre alteração o principio fundamental.

Assim, uma equidifferença pode soffrer as 8 transformações seguintes :

		a.b:c.d (1.ª)
alternando		a.c:b.d (2.ª)
invertendo		b.a:d.c (3.ª)
transpondo		c.d:a.b (4.ª)
invertendo	na 2.ª	c.a:d.b (5.ª)
alternando	na 3.ª	b.d:a.c (6.ª)
transpondo	na 4.ª	d.c:b.a (7.ª)
transpondo	na 6.ª	d.b:c.a (8.ª)

198. 2.ª RECIPROCA. *Em toda equidifferença, um meio é egual á somma dos extremos menos o outro meio.*

Dada a equidifferença x—a=b—d, tem-se, de accordo com a propriedade fundamental :

x+d=b+a, e subtrahindo-se *d* a ambos os membros : x=b+a—d, como se queria demonstrar.

199. CONSEQUENCIA. *A media differencial é egual á semi-somma dos extremos.*

Dada a equidifferença continua

a. x : x. b, applica-se lhe o principio fundamental : 2x=a+b, donde

$$x = \frac{a+b.}{2}$$

Propriedades das proporções

200. PRINCIPIO FUNDAMENTAL. *Em toda proporção, o producto dos meios é egual ao producto dos extremos.*

Multiplicando por *bd* ambos os membros da proporção

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tem-se :

$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$, e simplificando :

ad = bc.

Ex. : $\frac{9}{3} = \frac{36}{12}$ 9×12=3×36.

201—1.ª RECIPROCA. *Sendo o producto de dois numeros egual ao producto de outros dois, os quatro numeros formam uma proporção, occupando os extremos, os factores de um producto, e os meios, os factores do outro.*

Tem-se :

ad=bc. Dividindo por *bd* ambos os membros dessa egualdade, vem :

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}, \text{ e simplificando :}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

202. CONSEQUENCIA. Uma proporção não se altera multiplicando-se ou dividindo-se um extremo e um meio pelo mesmo numero, pois não soffre alteração o principio fundamental.

Assim, uma proporção póde soffrer as 8 alterações seguintes :

$a : b :: c : d$ (1.ª)

alternando $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (2.ª)

invertendo $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (3.ª)

transpondo $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ (4.ª)

invertendo na 2.ª $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ (5.ª)

alternando na 3.ª $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ (6.ª)

transpondo na 4.ª $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ (7.ª)

transpondo na 6.ª $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ (8.ª)

203. 2.ª RECIPROCA. Em toda proporção, um meio é egual ao producto dos extremos dividido pelo outro meio.

Dada a proporção $\frac{x}{a}=\frac{b}{d}$, têm-se, de accordo com a propriedade fundamental :

$xd=ab$, e dividindo-se ambos os membros por d : $\frac{xd}{d}=\frac{ab}{d}$, ou $x=\frac{ab}{d}$:

204.—CONSEQUENCIA. *A media proporcional é egual á raiz quadrada do producto dos extremos.*

Dada a proporção contínua

$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, applica-se-lhe o principio fundamental : $x^2=ab$, donde, extrahindo a raiz quadrada de ambos os membros :

$$x=\sqrt{ab}.$$

OUTRAS PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

205—I — *Multiplicando ordenadamente diversas proporções, os productos formam proporção.*

Multiplicando ordenadamente as proporções :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \frac{e}{f}=\frac{g}{h};\ \frac{i}{j}=\frac{k}{l}, \text{ tem-se :}$$

$$\frac{aei}{bfj}=\frac{cgk}{dhl},$$

$$\text{Ex. : } \frac{4}{8}=\frac{6}{12};\ \frac{6}{9}=\frac{8}{12};\ \frac{2}{15}=\frac{4}{30}$$

$$\frac{4\times6\times2}{8\times9\times15}=\frac{6\times8\times4}{12\times12\times30}$$

206—*As potencias do mesmo grau e as raizes do mesmo indice dos termos de uma proporção, formam outra proporção.*

A proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, elevada á potencia *t*, dá :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^t=\left(\frac{c}{d}\right)^t, \text{ ou } \frac{a^t}{b^t}=\frac{c^t}{d^t}$$

207—III. *Si duas proporções têm uma razão commum, as outras razões formam proporção.*

As proporções $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$ e $\frac{c}{g}=\frac{d}{e}$, têm as primeiras razões eguaes a $\frac{d}{e}$; e pois, ellas são eguaes entre si, isto é : $\frac{a}{b}=\frac{c}{g}$.

Corollario. Si duas proporções têm os mesmos antecedentes ou os mesmos consequentes, os consequentes, no 1.º caso, e os antecedentes, no 2.º, formam proporção.

208—IV. *Em uma serie de razões eguaes, a somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente está para seu consequente.*

Considerando a serie de razões eguaes: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, com a razão commum, *r*, têm-se : $a=br$; $c=dr$; $e=fr$; $g=hr$. Sommando ordenadamente estas egualdades, vem : $a+c+e+g=r\,(b+d+f+h)$, ou $r=\frac{a+c+e+g}{b+d+b+h}$. Substituindo *r* por qualquer das raizes acima, tem-se o theorema.

Corollario. Em toda proporção, a somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.

Demonstra-se analogamente.

209—V. *Em toda proporção, a somma ou differença dos dois primeiros termos está para a somma ou differença dos dois ultimos, assim como o 1.º está para o 2.º ou assim como o 3.º está para o 4.º.*

Seja a proporção

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alternando-a, tem-se :

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, e applicando-se-lhe a propriedade

precedente : $\frac{a\times b}{c}=\frac{c\times d}{d}$ ou $\frac{a\times b}{c\times d}=\frac{c}{d}$.

210. PROBLEMAS E QUESTÕES PRATICAS

A *4.ª proporcional* é egual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido: $\frac{6}{8}=\frac{9}{x}$. $x=\frac{8\times 9}{6}$.

A *3.ª proporcional* é o 4.º termo de uma proporção, cujos meios são eguaes : $\frac{2}{4}=\frac{4}{x}$. $x=\frac{4\times 4}{6}$.

A *media proporcional* de dous numeros é egual á raiz quadrada do producto destes numeros :

$\frac{3}{x}=\frac{x}{18}$. $x^2=2\times 18$. $x=\sqrt{2\times 18}$.

A *media arithmetica* de diversas quantidades é egual ao quociente de sua somma pelo numero das quantidades.

1) Resolver as seguintes equidifferenças :

12. 5: 9. x
x. 8:22. 3
14. x:19.15
2,1. x:34.1,8
9,05.0,6: x.4,4
$\frac{3}{4}.\frac{2}{9}:\frac{5}{8}.x$
5. x: x. 12

2) Escrever 3 razões por differença eguaes.

3) » » » » quociente »

4) » 4 » eguaes a $\frac{3}{8}$.

5) Transformar as seguintes razões em outras equivalentes, eliminando a fracção :

$\frac{2}{3}.\,7$; $\frac{3}{8}.\,9$; $\frac{2}{8}.\,\frac{3}{4}$; $\frac{4}{11}.\,\frac{8}{9}$.

6) Achar a media arithmetica entre 4 e 12; entre 6 e 16 ; entre 9 e 43 ; entre 6, 8 e 4, 04 ; entre 7, 06 e 0,008.

7) Escrever 3 equidifferenças continuas.

8) » » proporções »

9) Formar 4 proporções que contenham a razão $\frac{48}{3}$, sendo 1 continua.

10) Formar uma proporção continua, dando para extremos 6 e 14.

11) Dada a somma $6 + 8 = 5 + 9$, escrever uma equidifferença.

12) Fazer passar a equidifferença $7 - 4 = 5 - 2$ por todas as transformações possiveis.

13) Dados o producto $7 \times 6 = 21 \times 2$, escrever a proporção.

14) Fazer a proporção $\frac{8}{2} = \frac{48}{12}$ passar por todas as transformações possiveis.

15) Resolver as seguintes proporções :

$$\frac{32}{4} = \frac{864}{x}; \quad \frac{0,46}{0,12} = \frac{0,84}{x}, \quad \frac{\frac{3}{8}}{4} = \frac{x}{\frac{2}{6}}; \quad \frac{6}{x} = \frac{x}{16}.$$

16) Simplificar as seguintes proporções :

$$18 : x :: 256 : 14$$
$$232 : 114 :: x : 16$$
$$1280 : 670 :: 2460 : x.$$

17) Achar a media proporcional entre 16 e 40 ; entre 3, 5 e 16, 45 ; entre 2, 4 e $\frac{3}{5}$; entre $3\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{6}$.

18) Resolver a proporção $4 : 6 :: x : y$, sendo $x + y = 16$.

19) Resolver a proporção $x : 3,6 :: y : \frac{4}{5}$, sendo $x - y = 4$.

20) Achar o valor de x, y e z na serie de razões : $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}$, sendo $x + y + z = 840$.

21) Resolver a proporção $x : y :: 16 : 22$, sendo $x + y = \frac{3}{4}$.

22) Resolver a proporção $\frac{2}{3} : x :: \frac{4}{9} : y$, sendo $x - y = 2,4$.

23) Dadas as proporções infra, determinar o valor de z :

$$12 : 14 :: 30 : x$$
$$8 : 6 :: x : y$$
$$64 : 118 :: y : z.$$

INDICE

Errata

Leia-se: á pg. 6, penult. linha — *Todo algarismo escripto á direita de outro maior, somma-se: XI (onze);*
á pg. 6, linha 9 — *ajunctando o mesmo numero a cada um dos membros da mesma;*
á pg. 30, linha 23 — *for 0, 7 ou multiplo de 7;*
» » 30 » 29 — *da ordem impar for 0 ou formar um.*